

DS 4

Devoir sur table

(1 heure)

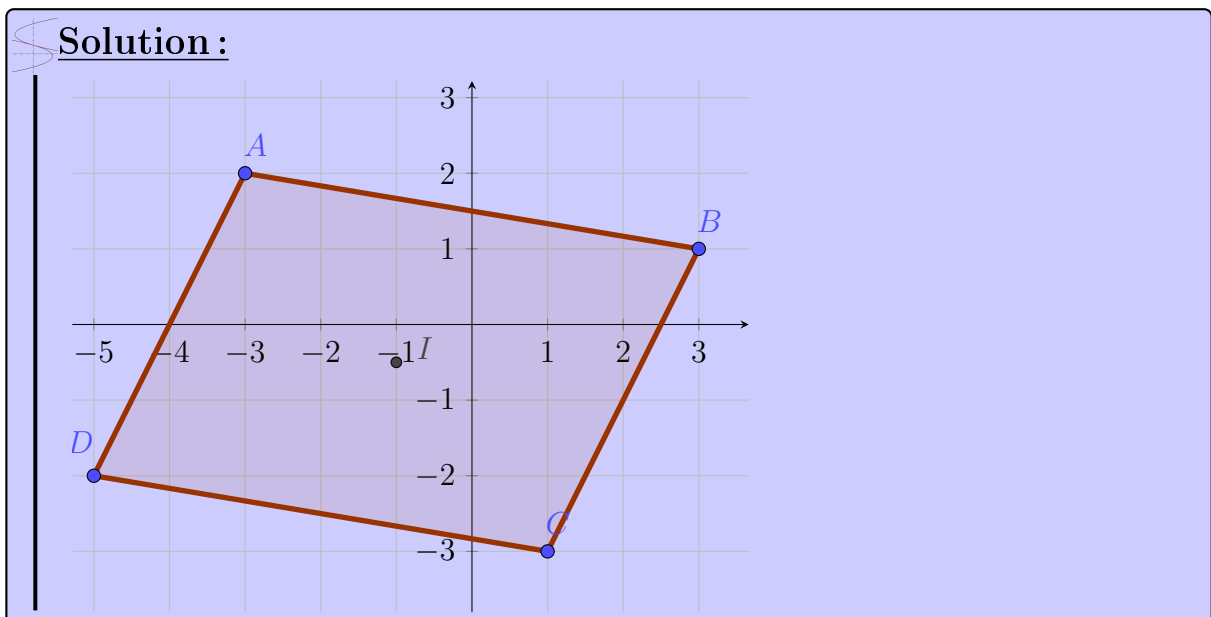
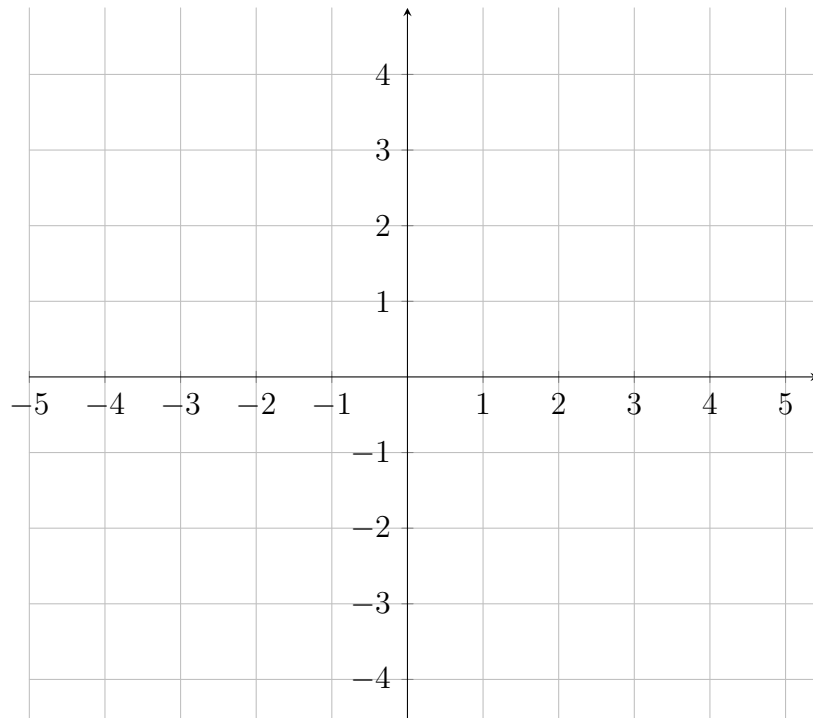
Nom :

Prénom :

Exercice 1 : (4 points)

On considère les points A , B et C d'affixes $z_A = -3 + 2i$, $z_B = 3 + i$ et $z_C = 1 - 3i$.

1. Placer les points dans un plan munit d'un repère orthonormé.



2. Déterminer l'affixe du point I milieu de $[AC]$.

**Solution :**

On pose z_I l'affixe du point I .

$$\text{On a } z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-3 + 2i + 1 - 3i}{2} = \frac{-2 - i}{2} = -1 - \frac{1}{2}i.$$

3. Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

**Solution :**

On pose z_D l'affixe du point D . On veut que D soit le symétrique de B par rapport à I :

$$z_I = \frac{z_B + z_D}{2} \Leftrightarrow 2z_I = z_B + z_D$$

$$\Leftrightarrow z_D = 2z_I - z_B$$

On a donc

$$\Leftrightarrow z_D = 2\left(-1 - \frac{1}{2}i\right) - (3 + i)$$

$$\Leftrightarrow z_D = -5 - 2i$$

Exercice 2 : (6 points)

On pose : $z_1 = -3 + 2i$ et $z_2 = \frac{1}{2} - i$

1. Calculer les modules des complexes z_1 et z_2 .

Solution :

$$|z_1| = |-3 + 2i| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$|z_2| = \left| \frac{1}{2} - i \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

2. Sans développer déterminer les modules des complexes suivants :

(a) $z_3 = -3 - 2i$

Solution :

On a $z_3 = \overline{z_1}$, donc $|z_3| = |\overline{z_1}| = |z_1| = \sqrt{13}$

(b) $z_4 = (3 - 2i) \left(\frac{1}{2} + i \right)$

Solution :

On a $z_4 = (-z_1) \times \overline{z_2}$ donc $|z_4| = |(-z_1) \times \overline{z_2}| = |(-z_1)| \times |\overline{z_2}| = |z_1| \times |z_2| = \sqrt{13} \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{65}}{2}$

(c) $z_5 = 4 \left(\frac{1}{2} + i \right)^2$

Solution :

On a $z_5 = 4 \times (\overline{z_2})^2$ donc $|z_5| = |4 \times (\overline{z_2})^2| = |4| \times |(\overline{z_2})^2| = 4 \times (|z_2|)^2 = 4 \times \frac{5}{4} = 5$

(d) $z_6 = \frac{6i}{\left(\frac{1}{2} + i \right)^3}$

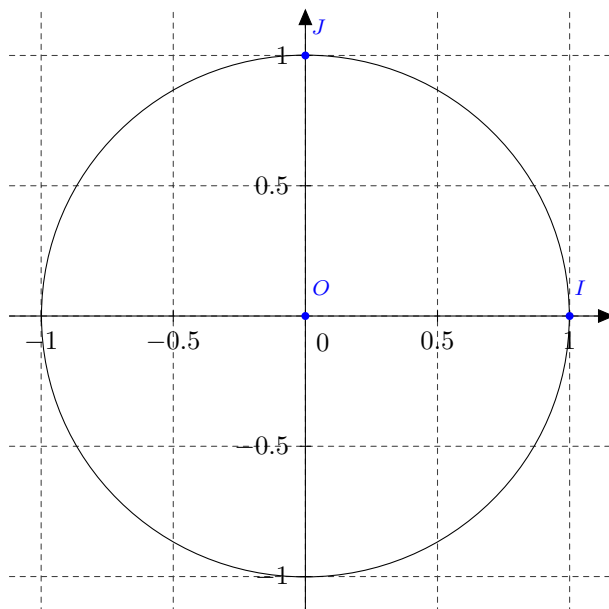
Solution :

On a $z_6 = \frac{6i}{(\overline{z_2})^3}$, donc $|z_6| = \left| \frac{6i}{(\overline{z_2})^3} \right| = \frac{|6i|}{|(\overline{z_2})^3|} = \frac{6}{(|z_2|)^3} = \frac{6}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^3} = \frac{6}{\frac{5\sqrt{5}}{8}} = \frac{48\sqrt{5}}{25}$

I

Exercice 3 : (5 points)

Déterminer le module et un argument des complexes suivants. On placera l'angle sur le cercle trigonométrique. Pour le complexe z_i , on notera θ_i un argument.



(a) $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$

 Solution :

On trouve $|z_1| = 2$ et $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$:

- $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$
- $\begin{cases} \cos(\theta_1) = -\frac{1}{2} \\ \sin(\theta_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ donc } \theta_1 = \frac{2\pi}{3}[2\pi].$

(b) $z_2 = 3\sqrt{2} - i\sqrt{6}$

 Solution :

On trouve $|z_2| = 2\sqrt{6}$ et $\theta_2 = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

- $|z_2| = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{18+6} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$

$$\bullet \begin{cases} \cos(\theta_2) = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} \\ \sin(\theta_2) = -\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\theta_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta_1) = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ donc } \theta_2 = -\frac{\pi}{6}[2\pi].$$

Exercice 4 : (5 points)

On considère les complexes suivants :

$$z_1 = 2 - 2i \quad , \quad z_2 = -3i$$

1. Déterminer un argument de z_1 et un argument de z_2 .

Solution :

On trouve $|z_1| = 2\sqrt{2}$ et $\theta_1 = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$:

- $|z_1| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$
- $\begin{cases} \cos(\theta_1) = \frac{2}{2\sqrt{2}} \\ \sin(\theta_1) = -\frac{2}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\theta_1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ donc } \theta_1 = -\frac{\pi}{4}[2\pi].$

$|z_2| = 3$ et $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$:

- $|z_2| = \sqrt{(-3)^2} = 3$
- $\begin{cases} \cos(\theta_2) = \frac{0}{3} \\ \sin(\theta_2) = -\frac{3}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\theta_2) = 0 \\ \sin(\theta_2) = -1 \end{cases} \text{ donc } \theta_2 = -\frac{\pi}{2}[2\pi].$

2. Déterminer, sans développer, un argument des complexes suivants :

(a) $z_3 = -3i(2 - 2i)$

Solution :

On a $z_3 = z_2 \times z_1$, donc $\arg(z_3) = \arg(z_2 \times z_1) = \arg(z_2) + \arg(z_1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}[2\pi].$

(b) $z_4 = \frac{(2 + 2i)^2}{3i}$

 Solution :

$$\begin{aligned} \text{On a } z_4 &= \frac{(\overline{z_1})^2}{\overline{z_2}} \text{ donc } \arg(z_4) = \arg\left(\frac{(\overline{z_1})^2}{\overline{z_2}}\right) = \arg((\overline{z_1})^2) - \arg(\overline{z_2}) = \\ &-2\arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0[2\pi] \end{aligned}$$

(c) $z_5 = (2 - 2i)^{2023}$

 Solution :

$$\begin{aligned} \text{On a } z_5 &= z_1^{2023}, \text{ donc } \arg(z_5) = \arg(z_1^{2023}) = 2023\arg(z_1) = -2023 \times \frac{\pi}{4} = \\ &-2024 \times \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 506\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}[2\pi] \end{aligned}$$