DS 1

Devoir sur table

(1 heure)

Exercice 1 : (6 points)

On considère l'équation suivante, notée (E) :

$$2z^3 - 8z^2 + 28z - 40 = 0$$

1. Vérifier que 2 est solution de l'équation (E).

Solution :

On remplace z par 2 :

$$\begin{aligned} 2\times(2)^3 - 8\times(2)^2 + 28\times(2) - 40 &= 16 - 32 + 56 - 40 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc 2 est bien solution de l'équation (E).

2. En déduire une factorisation du polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = 2z^3 - 8z^2 + 28z - 40$.

Solution :

On peut donc factoriser par $(z-2)$, avec la méthode d'identification des coefficients :

$(z-2)(az^2 + bz + c) = az^3 + (-2a+b)z^2 + (-2b+c)z - 2c$

on identifie les coefficients :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a &=& 2 \\ -2a+b &=& -8 \\ -2b+c &=& 28 \\ -2c &=& -40 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 2 \\ -4+b &=& -8 \\ -2b+20 &=& 28 \\ c &=& 20 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 2 \\ b &=& -4 \\ c &=& 20 \end{array}\right.$$

On a donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$P(z) = (z-2)(2z^2 - 4z + 20)$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ suivante :

$$2z^2 - 4z + 20 = 0$$

Solution :

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 160 = -144$.

Il y a donc deux racines complexes conjuguées :

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_1 &=& \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ z_2 &=& \overline{z_1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z_1 &=& \dfrac{4+i\sqrt{144}}{4} \\ z_2 &=& \overline{z_1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z_1 &=& 1+3i \\ z_2 &=& 1-3i \end{array}\right.$$

On a donc $\boxed{S = \{1+3i ; 1-3i\}}$

4. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).

Solution :

$$
\begin{aligned}
& 2z^3 - 8z^2 + 28z - 40 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (z-2)(2z^2 - 4z + 20) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (z - 2 = 0) \text{ ou } (2z^2 - 4z + 20 = 0) \\
\Leftrightarrow\ & (z = 2) \text{ ou } z = 1 + 3i \text{ ou } z = 1 - 3i
\end{aligned}
$$

On trouve donc $\boxed{S = \{2; 1 + 3i; 1 - 3i\}}$

Exercice 2 : (4 points)

1. Déterminer les entiers naturels diviseurs de 14.

Solution :

$\mathcal{D}(14) = \{1; 2; 7; 14\}$.

2. En déduire les entiers naturels n vérifiant :

$$2n + 3 | 14$$

Solution :

Il y a donc 4 cas possibles :

- $2n + 3 = 1 \Leftrightarrow 2n = -2$, ce qui est impossible car $n \in \mathbb{N}$.
- $2n + 3 = 2 \Leftrightarrow 2n = -1$, ce qui est impossible car $n \in \mathbb{N}$.
- $2n + 3 = 7 \Leftrightarrow 2n = 4 \Leftrightarrow n = 2$
- $2n + 3 = 14 \Leftrightarrow 2n = 11$, ce qui impossible car 11 n'est pas divisible par 2.

En conclusion, le seul entier possible est $n = 2$.

Exercice 3 : (5 points)

1. En utilisant uniquement la définition de la divisibilité, montrer la propriété suivante :

Propriété 1 :

Soient a, b et c trois entiers relatifs.
Si $a|b$ et $a|c$ alors $a|3b - 2c$.

Solution :

Supposons que $a|b$ et $a|c$ donc :

- $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = k \times a$.
- $\exists k' \in \mathbb{Z}$ tel que $c = k' \times a$.

Donc $3b - 2c = 3ka - 2k'a = (3k - 2k')a$. Sachant que $3k - 2k' \in \mathbb{Z}$, ce qui donne bien $a|3b-2c$.

2. Par l'absurde, montrer qu'il n'existe pas d'entier n tel que $2n+5$ **et** $3n-4$ soient divisibles par 7.

Solution :

Démonstration par l'absurde :
Supposons l'existence d'un entier n tel que $7|2n+5$ et $7|3n-4$, donc d'après la propriété précédente, $7|3(2n+5)-2(3n-4)$, soit $7|23$. Ce qui est absurde.
Conclusion, il n'existe pas d'entier n tel que $2n+5$ **et** $3n-4$ soient divisibles par 7.

Exercice 4 : (5 points)
Soit n un entier naturel. On note A_n l'entier :

$$A_n = 4^{2n+1} \times 3^{4n+2} - 1$$

On considère la propriété :

$$\mathcal{P}_n = "5|A_n"$$

Montrer par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

Solution :

- **Initialisation :** Pour $n=0$: $A_0 = 4 \times 3^2 - 1 = 35$. Ce qui bien divisible par 5. On a donc bien $\mathcal{P}_0$ vraie ...
- **Hypothèse de récurrence :** Supposons, pour n fixé, que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. On a donc $5|A_n$, donc $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $4^{2n+1} \times 3^{4n+2} - 1 = 5k$.
- **Hérédité :** On a :

$$\begin{array}{rcl} A_{n+1} & = & 4^{2(n+1)+1} \times 3^{4(n+1)+2} - 1 \\ & = & 4^{2n+1+2} \times 3^{4n+2+4} - 1 \\ & = & 4^2 \times 4^{2n+1} \times 3^4 \times 3^{4n+2} - 1 \\ & = & 1296 \times 4^{2n+1} \times 3^{4n+2} - 1 \\ & = & 1296(5k+1) - 1 \\ & = & 1296 \times (5k) + 1295 \\ & = & 5(1296k - 259) \end{array}$$

Avec $1296k - 259 \in \mathbb{N}$. Ce qui donne bien $5|A_{n+1}$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : On a donc prouver, par démonstration par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $5|A_n$.