DS 1

Devoir sur table

(1 heure)

Exercice 1 : (8 points)
Déterminer la forme algébrique des complexes suivants :

(a) $z_1 = (5+3i)(2-i)$

Solution :
$z_1 = (5+3i)(2-i) = 10 - 5i + 6i + 3 = 13 + i$

(b) $z_2 = (3-5i)^2$

Solution :
$z_2 = (3-5i)^2 = 9 - 30i - 25 = -16 - 30i$

(c) $z_3 = (6+2i)(6-2i) - i(3+i)$

Solution :
$z_3 = (6+2i)(6-2i) - i(3+i) = 36 + 4 - 3i + 1 = 41 - 3i$

(d) $z_4 = \dfrac{1-3i}{2+i}$

Solution :
$$z_4 = \frac{1-3i}{2+i} = \frac{(1-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2 - i - 6i + 3i^2}{4+1} = \frac{-1-7i}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$$

Exercice 2 : (4 points)
On pose $z_1 = 5 - 2i$ et $z_2 = 4 + 3i$. Déterminer la forme algébrique des complexes suivants :

1. $Z_1 = z_1 \times \overline{z_2}$

Solution :
$Z_1 = z_1 \times \overline{z_2} = (5-2i)(4-3i) = 20 - 15i - 8i - 6 = 14 - 23i$

2. $Z_2 = \dfrac{\overline{z_1}}{z_2}$

Solution :
$$Z_2 = \frac{\overline{z_1}}{z_2} = \frac{5+2i}{4+3i} = \frac{(5+2i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{20-15i+8i+6}{16+9} = \frac{26-7i}{25} = \frac{26}{25} - \frac{7}{25}i$$

Exercice 3 : (4 points)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $3(z-2i) = 5z - 6$

Solution :
$$\begin{aligned} 3(z-2i) = 5z-6 &\Leftrightarrow 3z - 6i = 5z - 6 \\ &\Leftrightarrow -2z = -6 + 6i \\ &\Leftrightarrow z = 3 - 3i \end{aligned}$$

$\boxed{S = \{3 - 3i\}}$.

(b) $3z + 2 = 2iz - 3i$

Solution :
$$\begin{aligned} 3z + 2 = 2iz - 3i &\Leftrightarrow 3z - 2iz = -2 - 3i \\ &\Leftrightarrow (3-2i)z = -2 - 3i \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-2-3i}{3-2i} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{(-2-3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-6-4i-9i+6}{9+4} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-13i}{13} \\ &\Leftrightarrow z = -i \end{aligned}$$

$\boxed{S = \{-i\}}$.

Exercice 4 : (4 points)

On considère l'équation suivante :

$$2(3 - iz) = 3i(\overline{z} - i) \quad (E)$$

1. En posant $z = a + ib$, montrer que l'équation (E) est équivalente à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 6+2b & = & 3b+3 \\ -2a & = & 3a \end{array}\right.$$

Solution :

$$\begin{array}{rcl} 2(3-iz) = 3i(\overline{z}-i) & \Leftrightarrow & 2(3-i(a+ib)) = 3i(a-ib-i) \\ & \Leftrightarrow & 6-2ia+2b = 3ia+3b+3 \\ & \Leftrightarrow & 6+2b-2ia = 3b+3+3ia \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} 6+2b & = & 3b+3 \\ -2a & = & 3a \end{array}\right. \end{array}$$

2. En déduire la solution de l'équation (E).

Solution :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 6+2b & = & 3b+3 \\ -2a & = & 3a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b & = & 3 \\ a & = & 0 \end{array}\right.$$

On trouve donc $z = 3i$.

$\boxed{S = \{3i\}}$.