Fiche 8 -B-

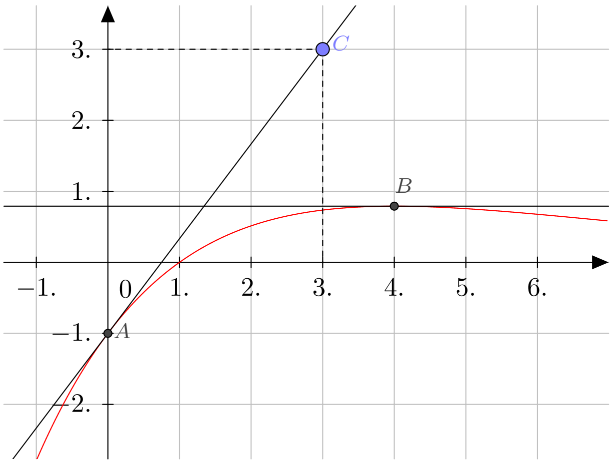
Dérivation et variation

Exercice 1 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 5$$

1. Déterminer la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'on a :
$$f'(x) = 6\,(x-3)\,(x-2)$$
3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, dont on donne la courbe représentative.
La courbe admet au point $A(0,-1)$ une tangent qui passe par le point $C(3,3)$.
La courbe admet au point B d'abscisse 4 une tangente horizontale.



Déterminer les valeurs de $f'(0)$ et $f'(4)$.

Exercice 3 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{5x^2 + 4x + 2}{x^2 + 1}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Montrer que la dérivée de la fonction est :
$$f'(x) = \frac{(-2x+4)\,(2x+1)}{(x^2+1)^2}$$
2. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer les positions des tangentes horizontales à la courbe $\mathcal{C}_f$.
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
5. Établir un tableau de valeur de la fonction, puis tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 4 :

Partie I

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 4x^3 - 3x - 8$$

1. Étudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution que l'on note α. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
3. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie II

On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{4x^2 - 1}$$

1. Démontrer que le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $g(x)$ sur $[1; +\infty[$.
2. En déduire le sens de variation de f sur $[1; +\infty[$.

Exercice 5 : Une entreprise fabrique et vend une quantité x d'objets. La capacité maximale de production de l'entreprise est de 21 objets. Le coût total de fabrication de x objets, exprimé en euros, est donné par :

$$C(x) = 2x^3 - 54x^2 + 470x + 80$$

Chaque objet est vendu 200 euros.

1. Pour 12 objets fabriqués et vendus calculer :
   - le coût de fabrication ;
   - la recette ;
   - le bénéfice.
2. $R(x)$ et $B(x)$ désignent respectivement la recette et le bénéfice pour x objets vendus.
   (a) Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
   (b) Montrer que le bénéfice pour x objets vendus est :
   $$B(x) = -2x^3 + 54x^2 - 270x - 80$$
   (c) Déterminer la dérivée de la fonction B. Montrer que l'on a, pour tout $x \in [0, 21]$:
   $$B'(x) = -6\,(x - 15)\,(x - 3)$$
   (d) En déduire le tableau de variation de la fonction B sur $[0, 21]$.
   (e) Pour quel nombre d'objets fabriqués et vendus le bénéfice est -il maximum ? Quel est ce bénéfice maximum ?