Chapitre 2

Trigonométrie

Table des matières

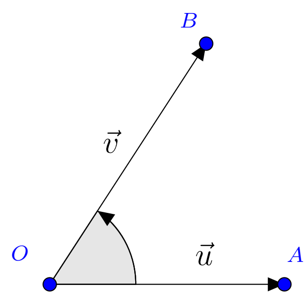
Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Le plan est orienté dans le sens direct (sens anti horaire).
Toutes les mesures d'angles seront en radian.

1 Angles orientés

1.1 Définition.

Définition 1 :

Soit trois points distincts O , A, B du plan, on note $\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right)$ l'angle orienté dont la valeur absolue de la mesure correspond à l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ et le signe est donné par le sens de $\overrightarrow{OA}$ vers $\overrightarrow{OB}$.



Définition 2 :

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls. On note A et B les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, on définit l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ par la relation :

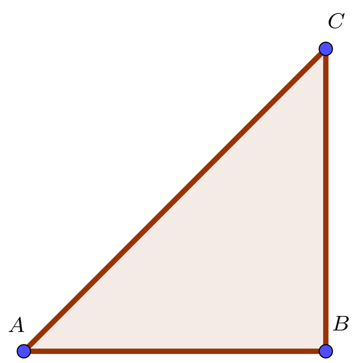
$$(\vec{u}; \vec{v}) = \left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right)$$

Remarque : Les mesures des angles orientés ne dépendent pas des représentant des vecteurs.

Exercice 1 :

Dans le triangle rectangle isocèle ABC, déterminer les mesures des angles suivants :

- $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$ =....................................
- $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}\right)$ =....................................
- $\left(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}\right)$ =....................................
- $\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{AB}\right)$ =....................................



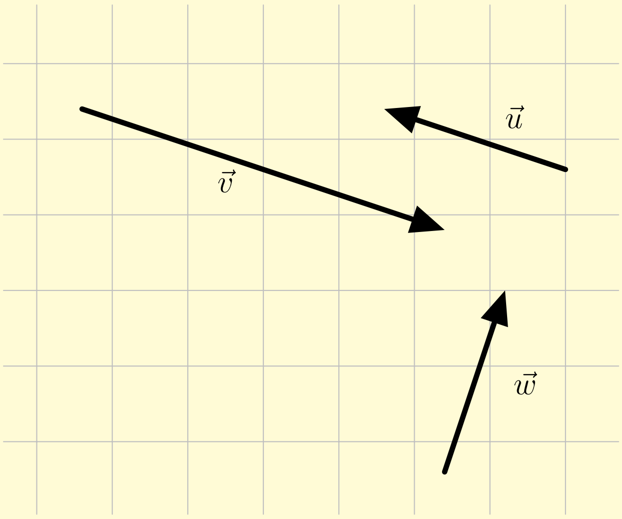
1.2 Colinéarité et orthogonalité

Propriété 1 :

Pour deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ non nuls.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens si et seulement si $(\vec{u};\vec{v}) = 0 \quad [2\pi]$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire si et seulement si $(\vec{u};\vec{v}) = \pi \quad [2\pi]$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ ou $(\vec{u};\vec{v}) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

Exemple 1 :



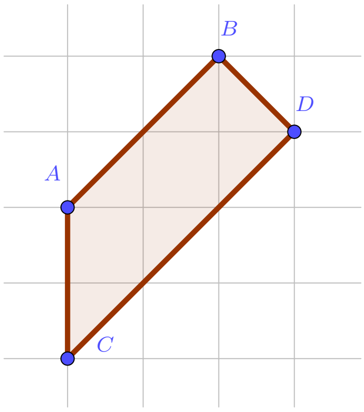
On a ici :

- $(\vec{u};\vec{v}) = \pi \quad [2\pi]$. Car les vecteurs sont colinéaires, mais dans le sens contraire.
- $(\vec{w};\vec{u}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
- $(\vec{w};\vec{v}) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

Exercice 2 :

Déterminer une mesure des angles suivants :

- $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)$ =....................................
- $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DC}\right)$ =....................................
- $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD}\right)$ =....................................
- $\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{DB}\right)$ =....................................

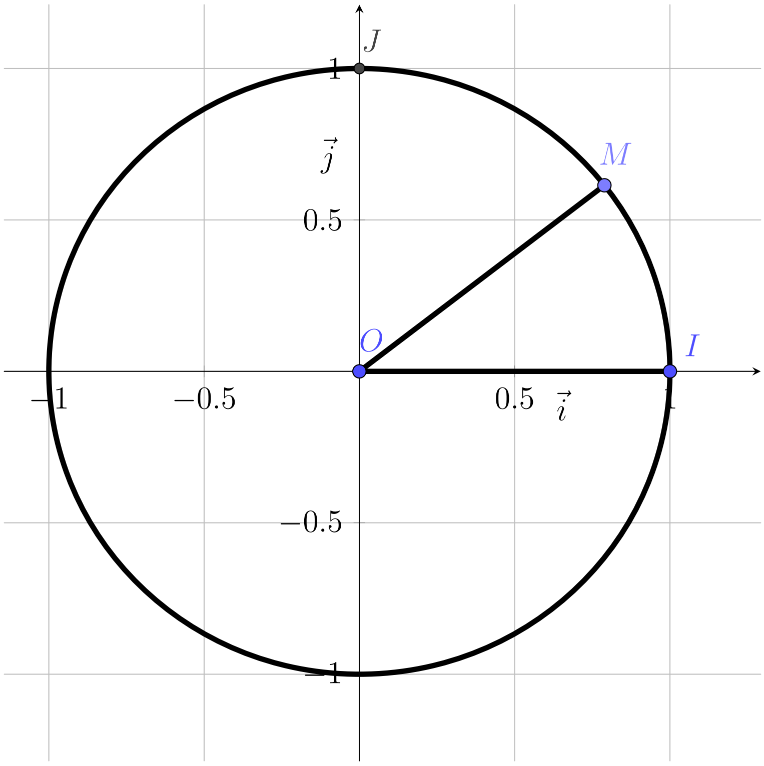


2 Cercle trigonométrique

2.1 Construction du cercle trigonométrique.

Définition 3 :

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens direct, dit aussi sen trigonométrique.
A tout point M du cercle, on associe l'angle $\left(\vec{i}, O\vec{M}\right)$. Une mesure en radian de l'angle $\left(\vec{i}, O\vec{M}\right)$ est égale à la distance algébrique curviligne $\widehat{OM}$.

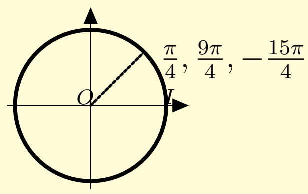


Propriété 2 :

Pour M un point sur le cercle, on note x une mesure de l'angle $\left(\vec{i}, \vec{OM}\right)$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, le nombre $x + 2k\pi$ est aussi une mesure de l'angle $\left(\vec{i}, \vec{OM}\right)$. Il y a donc une infinité de mesure pour un même angle, toutes égales à 2π près.

Exemple 2 :

Pour le point M associé à la mesure $\frac{\pi}{4}$, il est aussi associé à la mesure $\frac{9\pi}{4}$, en faisant un tour de plus dans le sens trigonométrique, ou à la mesure $-\frac{15\pi}{4}$, en faisant deux tours dans le sens négatif.



Exercice 3 : On considère le point M associé à l'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.
Déterminer les mesures x de l'angle $\left(\vec{i}, \vec{OM}\right)$ tels que :

(a) $x \in [2\pi; 4\pi]$

....
....
....
....

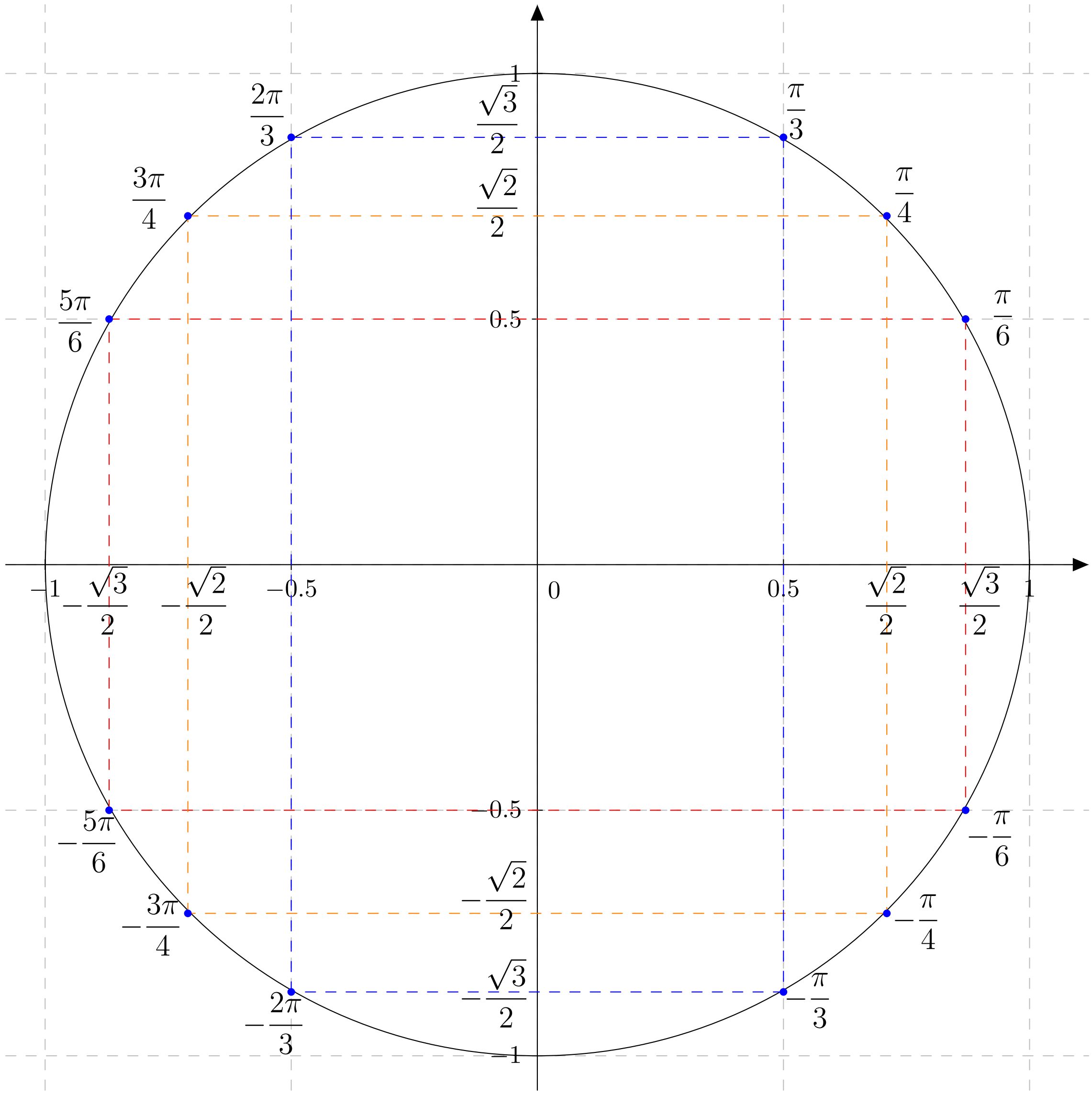
(b) $x \in [8\pi; 12\pi]$

....
....
....
....

(c) $x \in [-106\pi; -90\pi]$

....
....
....
....

2.2 Angles remarquable du cercle trigonométrique



2.3 Mesure principale

Définition 4 :

Pour M un point sur le cercle, on appelle **mesure principale** de l'angle $\left(\vec{i}, \vec{OM}\right)$ la mesure x de cet angle telle que $x \in \left]-\pi, \pi\right]$. Cette mesure est unique.

Exemple 3 :

Pour un angle de mesure $\frac{113\pi}{6}$, sa mesure principale est $\frac{5\pi}{6}$, en effet :
$\frac{113\pi}{6} = \frac{108\pi + 5\pi}{6} = \frac{108\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 18\pi = \frac{5\pi}{6} + 9 \times 2\pi$. Il y donc 9 tours en trop...

Exercice 4 : Déterminer la mesure principale des angles suivants :

(a) $x = -11\pi$

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

(b) $x = \dfrac{53\pi}{4}$

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

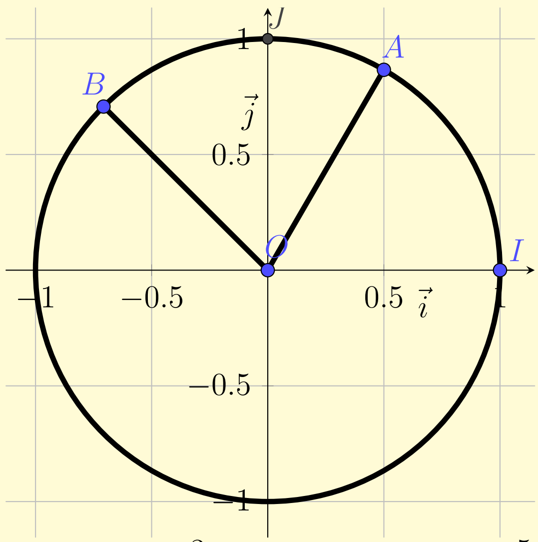
(c) $x = \dfrac{77\pi}{3}$

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Propriété 3 :

Pour M et M' deux points sur le cercle, avec x une mesure de l'angle $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$ et x' une mesure de l'angle $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM'}\right)$. Une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right)$ est $x' - x + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 4 :



On a : $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OA}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ et $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$, donc $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{5\pi}{12}$

Exercice 5 :

Déterminer une mesure des angles suivants :

- $\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right) =$.....................................
- $\left(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}\right) =$.....................................
- $\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}\right) =$.....................................
- $\left(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB}\right) =$.....................................