Chapitre 3

Les suites

Table des matières

1 Généralité :

Définition 1 :

Une suite (u_n) est une liste ordonnée de nombres réels telle qu'à tout entier n on associe un nombre réel noté u_n.
u_n est appelé le terme de rang n de la suite (u_n).

Exemple 1 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 3n^2 - 5n + 2$, le terme de rang 5 est :
$u_5 = 3 \times 5^2 - 5 \times 5 + 2 = 52$

Exercice 1 : Déterminer le terme de rang 8 des suites de termes généraux suivants :

(a) $u_n = 2n - 5$.

....

(b) $u_n = n^2 - 3n + 1$.

....

Définition 2 :

On dit qu'une suite est générée par une relation de récurrence si le calcul de chaque terme est donné grâce aux termes précédents.

Exemple 2 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n^2 - 2$, le terme de rang 3 est :$u_3 = 3 \times u_2^2 - 2$, avec $u_2 = 3 \times u_1^2 - 2$ et $u_1 = 3 \times u_0^2 - 2$, donc $u_1 = -2$, puis $u_2 = 10$, puis $u_3 = 298$.

Exercice 2 : Déterminer le terme de rang 3 des suites suivantes :

(a) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 7$.

....
....
....

(b) $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = -u_n + 2$.

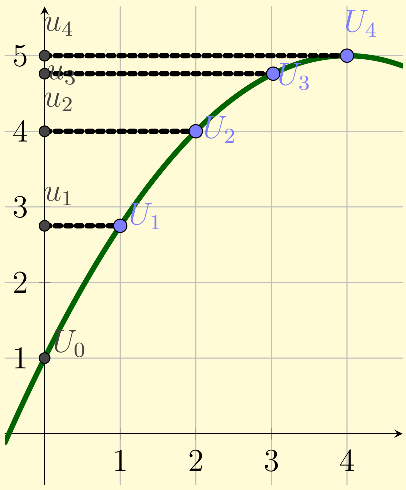
....
....
....

2 Représentation d'une suite :

Une représentation simple consiste à placer les points de coordonnées (n, u_n) :

Exemple 3 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = -\frac{1}{4}n^2 + 2n + 1$,



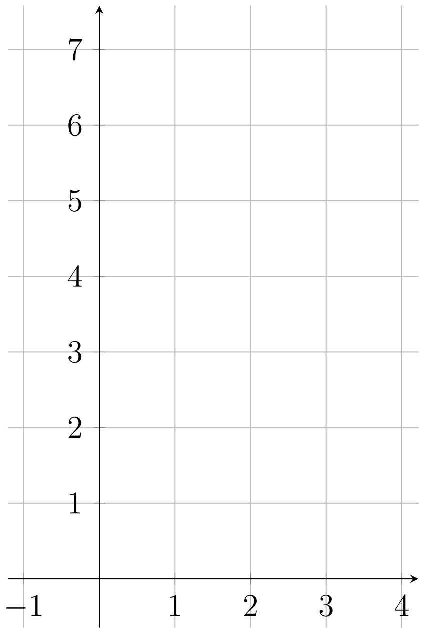
Exercice 3 : On considère la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = 2n + 1$$

Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3
v_n				

En déduire une représentation de la suite (v_n) :



3 Variation :

Définition 3 :

- Une suite (u_n) est dite croissante si pour tout entier n, on a $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- Une suite (u_n) est dite décroissante si pour tout entier n, on a $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- Une suite (u_n) est dite constante si pour tout entier n, on a $u_{n+1} = u_n$.

Exemple 4 :

Pour prouver qu'une suite est croissante ou décroissante, on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$:
Pour la suite (u_n) définie par $u_n = 3n^2 - 3n + 2$, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 6n$, donc $u_{n+1} \geqslant u_n$, la suite est donc croissante.

Exercice 4 : Montrer que la suite de terme général $u_n = 5n - 3$ est croissante.

....
....
....

4 Suites arithmétiques

4.1 Définition

Définition 4 :

Une suite (u_n) est dite arithmétique s'il existe un réel R, appelé raison, tel que :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + R$.

Exemple 5 :

Les quatre premiers termes de la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $R = 3$ sont :
$u_0 = 5$; $u_1 = 8$; $u_2 = 11$; $u_3 = 14$

Exercice 5 : On considère la suite (v_n), suite arithmétique de première terme $v_0 = 12$ et de raison $R = -4$.
Déterminer les cinq premiers termes de la suite :

- $v_0 = \ldots\ldots\ldots$ | • $v_1 = \ldots\ldots\ldots$ | • $v_2 = \ldots\ldots\ldots$ | • $v_3 = \ldots\ldots\ldots$ | • $v_4 = \ldots\ldots\ldots$

4.2 Variation :

Propriété 1 :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison R et de premier terme u_0, la suite est :

- croissante si $R \geqslant 0$.
- décroissante si $R \leqslant 0$.

Exemple 6 :

Une suite arithmétique de raison $R = \frac{2}{3}$ est croissante.
Une suite arithmétique de raison $R = -4$ est décroissante.

Exercice 6 : On considère la suite v_n définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = 2n + 1$$

1. Montrer que la suite est une suite arithmétique.

   ....

   ....

2. Déterminer la variation de la suite (v_n).

   ....

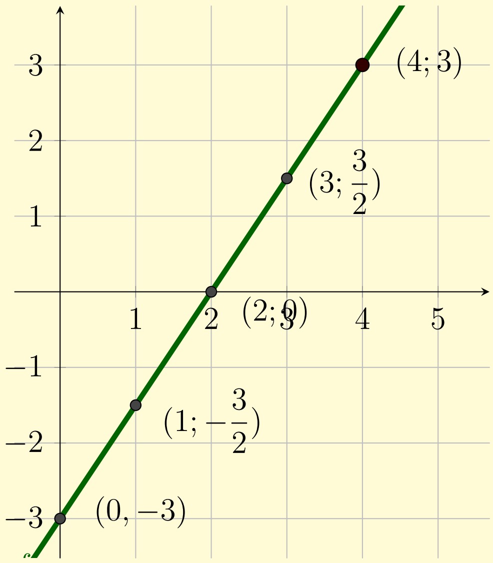
4.3 Représentation d'une suite arithmétique

Propriété 2 :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison R. Le nuage de point (n, u_n) est un ensemble de points alignés. La droite contenant ces points est la droite de coefficient directeur R et d'ordonnée à l'origine u_0

Exemple 7 :

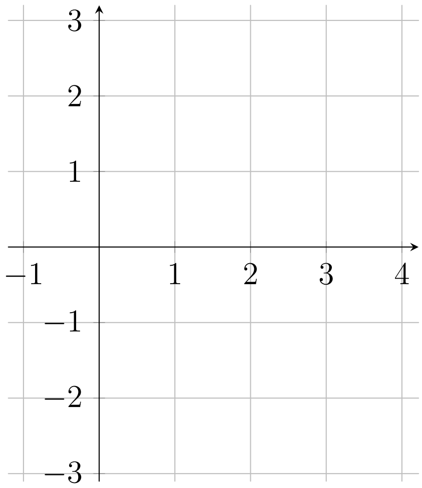
Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme -3 et de raison $\frac{3}{2}$.



Exercice 7 : On considère la suite (v_n), suite arithmétique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $-\frac{1}{2}$. Compléter le tableau de valeurs, puis représenter la suite.

n	0	1	2	3
v_n				

En déduire une représentation de la suite (v_n) :



5 Suites géométriques

5.1 Définition

Définition 5 :

Une suite (u_n) est dite géométrique s'il existe un réel q non nul, appelé raison, tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$.

Remarque : On ne travaille dans cette partie qu'avec des suites positives.

Exemple 8 :

Les quatre premiers termes de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 3$ sont :
$u_0 = 5$; $u_1 = 15$; $u_2 = 45$; $u_3 = 135$

Exercice 8 : On considère la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 9$ et de raison $q = \frac{1}{3}$.
Déterminer les cinq premiers termes de la suite :

- $v_0 =$ .... | - $v_1 =$ .... | - $v_2 =$ .... | - $v_3 =$ .... | - $v_4 =$ ....

5.2 Variation :

Propriété 3 :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q (avec $q > 0$) et de premier terme u_0 (avec $u_0 > 0$) suite est :

- croissante si $q \geqslant 1$.
- décroissante si $0 < q \leqslant 1$.

Exemple 9 :

La suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 7$ est croissante.
La suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = \frac{1}{2}$ est décroissante.

Exercice 9 : On considère la suite v_n définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = 5 \times 2^n$$

1. Montrer que la suite est une suite géométrique.

   ....
   ....

2. Déterminer la variation de la suite (v_n).

   ....

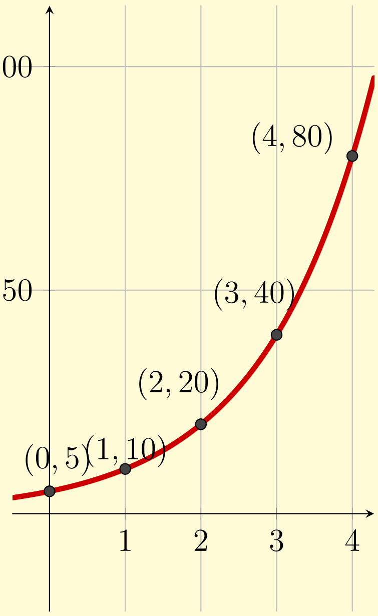
5.3 Représentation d'une suite géométrique

Propriété 4 :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. La courbe passant par le nuage de point (n, u_n) est un courbe exponentielle.

Exemple 10 :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme 5 et de raison 2.



Exercice 10 : On considère la suite (v_n), suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $\frac{1}{2}$. Compléter le tableau de valeurs, puis représenter la suite.

n	0	1	2	3
v_n				

En déduire une représentation de la suite (v_n) :