Chapitre 13

Primitives

Table des matières

Dans tout le chapitre, f désigne une fonction définie sur un intervalle I, et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1 Primitives

Définition 1 :

Soit f une fonction définie sur I. On appelle primitive de f toutes fonctions dont la dérivée est f :
F est une primitive de f sur l'intervalle I, si et seulement si F est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$F'(x) = f(x)$$

Exemple 1 :

Pour $f(x) = 6x^2 + 5x - 3$, la fonction définie par $F(x) = 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x + 7$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, car on a $F'(x) = f(x)$...

Exercice 1 : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 6x - 4$$

Parmi les fonctions suivantes, déterminer les fonctions primitives de la fonction f :

- $F_1(x) = 3x - 4$
- $F_2(x) = x^2 - 4$
- $F_3(x) = 3x^2 - 4x + 7$
- $F_4(x) = 3x^2 - 4x - \frac{5}{2}$

Propriété 1 :

Pour une fonction f continue sur I, il existe une infinité de primitives toutes égales à une constante additive près :
Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors il existe un réel k tel que, pour tout x de I :

$$F(x) = G(x) + k$$

Exercice 2 : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{8x}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

- Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

  $$F(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

  est une primitive de f.
- Déterminer la primitive F_1 de f qui s'annule en 1.
- Déterminer la primitive F_2 de f tel $F_2(0) = 3$.

2 Primitives de fonctions usuelles

D_f	$f(x)$	$F(x)$
$\mathbb{R}$	$k \in \mathbb{R}$	kx
$\mathbb{R}$	x	$\frac{1}{2}x^2$
$\mathbb{R}$	x^2	$\frac{1}{3}x^3$
$\mathbb{R}$	x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\frac{1}{x^n}$ avec $n \geq 2$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$

Exercice 3 : Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 5x^2 - 3x + 4$

   ....

   ....

   ....

2. $f(x) = x^6 - \frac{6}{x^2}$

   ....

   ....

   ....

3. $f(x) = \frac{5}{3}x^2 + \frac{5}{x^6}$

   ....

   ....

   ....

3 Fonctions trigonométriques

Propriété 2 :

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et l'on a :

$$(\cos)' = -\sin \quad \text{et} \quad (\sin)' = \cos$$

En conséquence, on dispose des primitives des fonctions trigonométriques.

Pour ω et φ des réelles. On pose $f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$ et $g(t) = \sin(\omega t + \varphi)$, les fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$f'(t) = -\omega \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad g'(t) = \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

Exercice 4 :

1. Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = 3\sin(x) - 2\cos(x)$
   ....
   ....
   ....
   (b) $f(x) = -4\cos(3x - 5)$
   ....
   ....
   ....
   (c) $f(x) = 7\sin(2x + 3)$
   ....
   ....
   ....
2. Déterminer une primitives des fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = 3\sin(x) - 2\cos(x)$
   ....
   ....
   ....
   (b) $f(x) = -4\cos(3x - 5)$
   ....
   ....
   ....
   (c) $f(x) = 7\sin(2x + 3)$
   ....
   ....
   ....