Chapitre 4

Produit scalaire

Table des matières

On se place dans un repère orthonormal $(O; I, J)$. On notera $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$

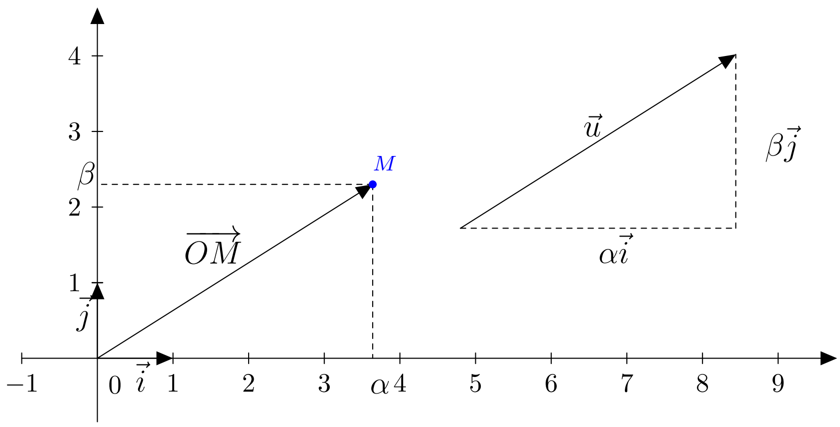
1 Coordonnées d'un vecteur

1.1 Définition

Définition 1 :

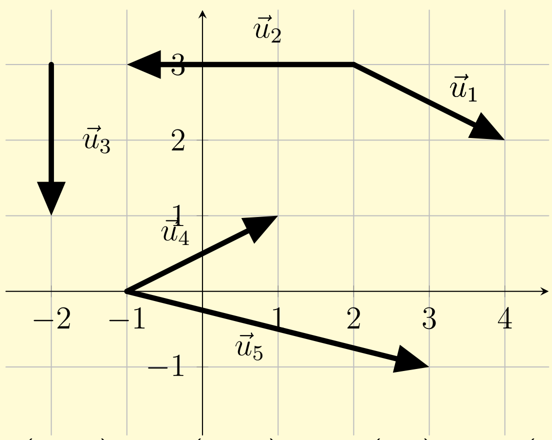
Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe deux réels α et β tel que $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ appelés coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$. On note alors $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

Ces coordonnées correspondent aux coordonnées du point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.



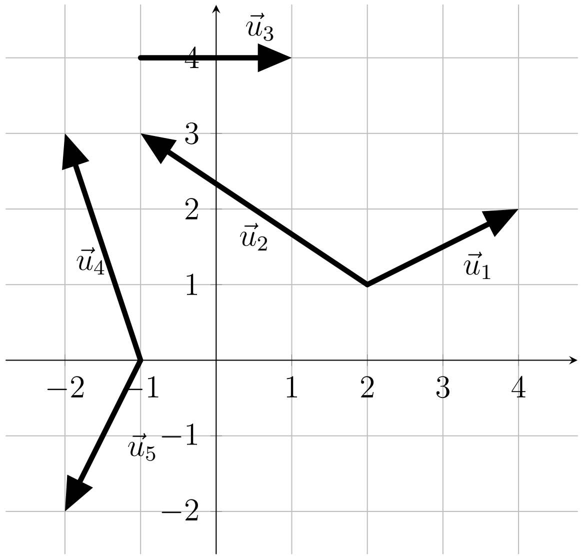
Remarque : les coordonnées du vecteur nul sont : $\vec{0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exemple 1 :



On a $\vec{u_1}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{u_2}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u_3}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{u_4}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u_5}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1 : Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :



$\vec{u_1}\begin{pmatrix} .... \\ .... \end{pmatrix}$, $\vec{u_2}\begin{pmatrix} .... \\ .... \end{pmatrix}$, $\vec{u_3}\begin{pmatrix} .... \\ .... \end{pmatrix}$, $\vec{u_4}\begin{pmatrix} .... \\ .... \end{pmatrix}$, $\vec{u_5}\begin{pmatrix} .... \\ .... \end{pmatrix}$.

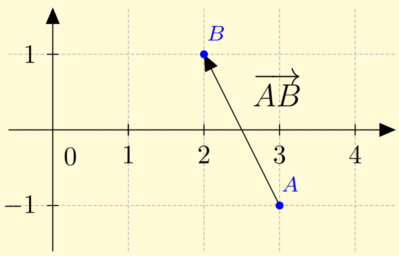
1.2 Coordonnées d'un vecteur défini par deux points

Propriété 1 :

Soit $A\,(x_A, y_A)$ et $B\,(x_B, y_B)$, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Exemple 2 :

Soit $A\,(3, -1)$ et $B\,(2, 1)$, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$



Exercice 2 : On considère les points $A(-2, 5)$, $B(3, 1)$ et $C(2, 2)$.
Déterminer les coordonnées des vecteurs :

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} .... \\ .... \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} .... \\ .... \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} .... \\ .... \end{pmatrix}$

2 Norme d'un vecteur

Propriété 2 :

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, la norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$ est donné par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

Soit $A\,(x_A, y_A)$ et $B\,(x_B, y_B)$, la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, est donné par :

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

remaque : $\|\vec{0}\| = 0$

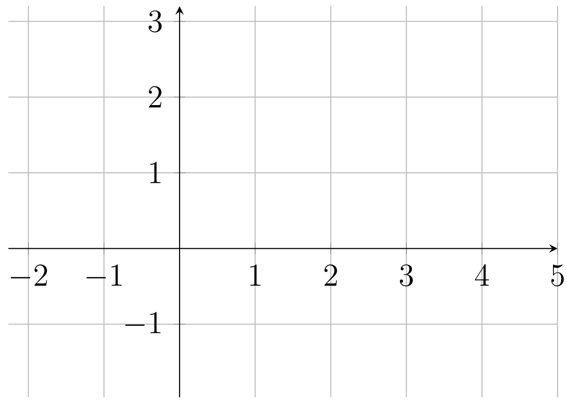
Exemple 3 :

Déterminer la norme des vecteurs suivants :

- $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\ 4\end{pmatrix}$: $\|\vec{u}\| =$..
- $A\,(2,5)$ et $B\,(-4,1)$: $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| =$..

Exercice 3 : On considère les points $A(-1,2)$, $B(1,-1)$ et $C(4,1)$.

1. Placer les points dans le repère suivant :



2. Déterminer les distances AB, AC et BC.

. . . .

. . . .

3. En déduire la nature du triangle ABC.

. . . .

. . . .

3 Produit scalaire

3.1 Définition à l'aide de l'angle

Définition 2 :

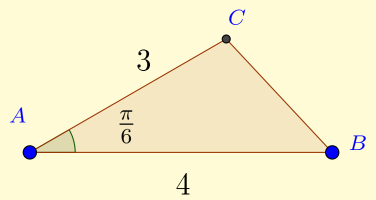
Définition avec les angles

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on définit le produit scalaire, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, par le nombre réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

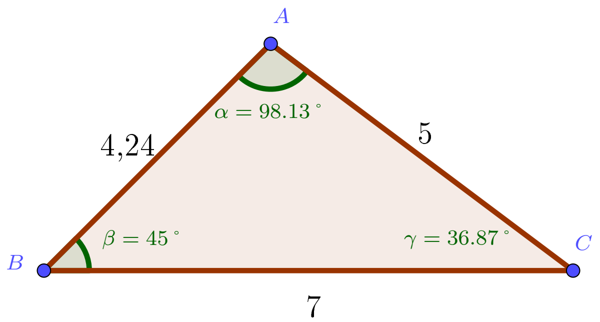
Exemple 4 :

Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans le cas suivant :



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$..

Exercice 4 :



Déterminer les produits scalaires suivants :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ ....
  ....
  ....
- $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} =$ ....
  ....
  ....
- $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} =$ ....
  ....
  ....

3.2 Définition avec la projection

Définition 3 :

Définition avec les projections

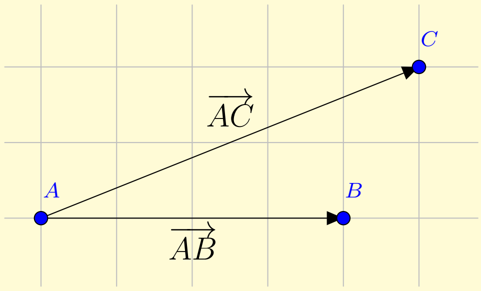
On considère trois points O, A et B.

On a : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overline{OA} \times \overline{OH}$ où H est le projeté orthogonal de B sur (OA), et $\overline{OA}$ est la mesure algébrique de OA.

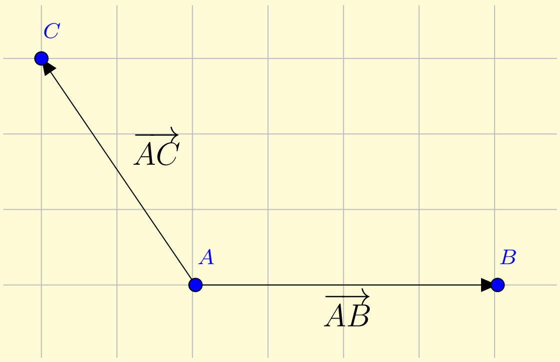
- Si A et H sont du même côté par rapport à O, on a : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OH$.
- Sinon : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -OA \times OH$

Exemple 5 :

Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans les cas suivants (l'unité étant le carreau) :



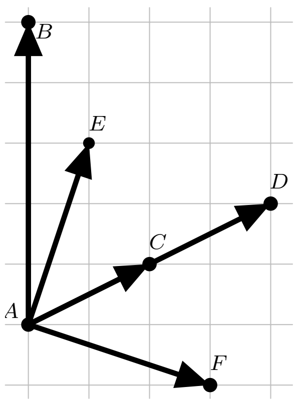
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$..



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$..

Exercice 5 :

- $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} =$ ....
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} =$ ....
- $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} =$ ....
- $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AB} =$ ....



3.3 Définition analytique

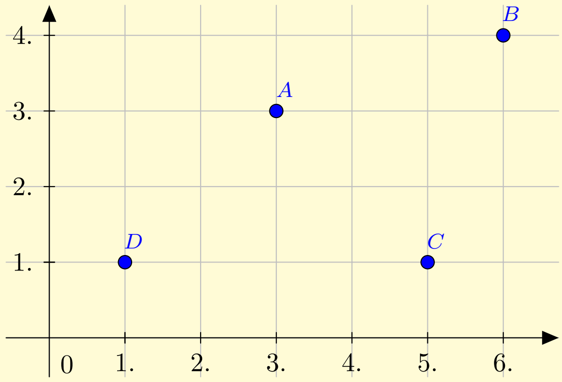
Définition 4 :

Définition avec les coordonnées

Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\end{pmatrix}$, on définit le produit scalaire par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\alpha\alpha'+\beta\beta'$$

Exemple 6 :



Déterminer les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$..

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=$..

Exercice 6 : On considère les points $A(-2,5)$, $B(4,1)$ et $C(-2,3)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs :

• $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}....\\....\end{pmatrix}$	• $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}....\\....\end{pmatrix}$	• $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}....\\....\end{pmatrix}$

2. Déterminer les produits scalaires suivants :

• $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$	• $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=$	• $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$ ....

4 Propriétés

Propriété 3 :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, on a :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times \vec{u} \cdot \vec{v}$, où $k \in \mathbb{R}$
- $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ (Carré scalaire)
- Identité remarquables :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

Exemple 7 :

Pour A, B et C trois points du plan.

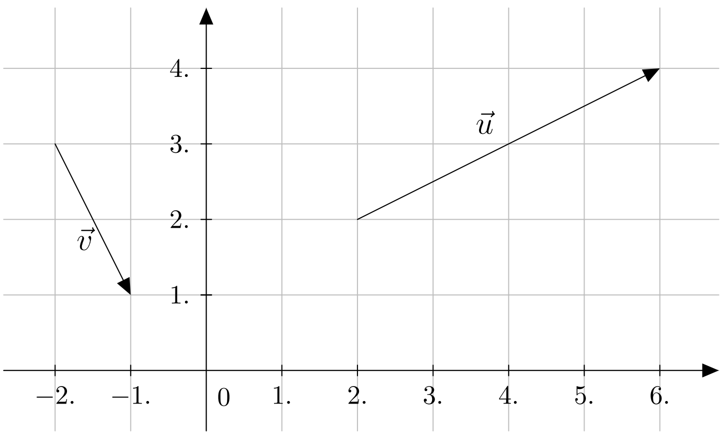
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot (3\overrightarrow{AC}) = 3 \times \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Propriété 4 :

Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

Exercice 7 : Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux :



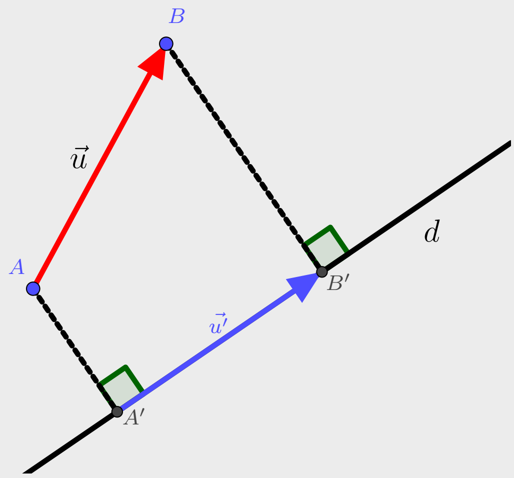
. . . .
. . . .
. . . .

5 Applications

5.1 Projection d'un vecteur

Définition 5 :

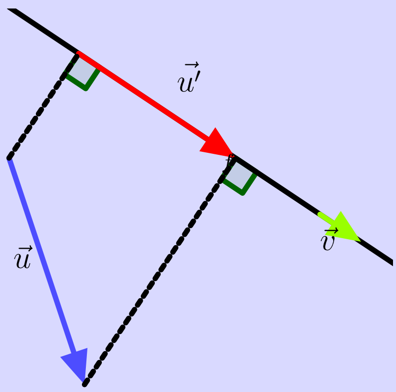
Soit d une droite du plan.
On considère un vecteur non nul $\vec{u}$ dont un représentant est le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
On note respectivement A' et B' les projetés orthogonaux de A et de B sur d.
On appelle alors projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur d le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$.



Propriété 5 :

Soit d une droite dirigée par un vecteur $\vec{v}$.(non nul)
Pour tout vecteur non nul $\vec{u}$, en notant $\vec{u'}$ le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur d, on a :

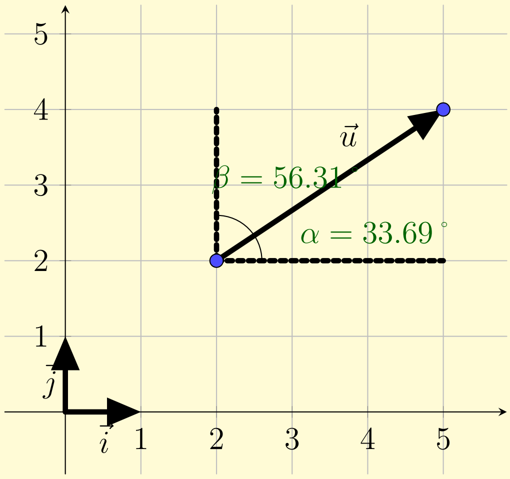
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u'} \cdot \vec{v}$$



Si $\|\vec{v}\| = 1$ (vecteur unitaire) , en notant $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$, on a :

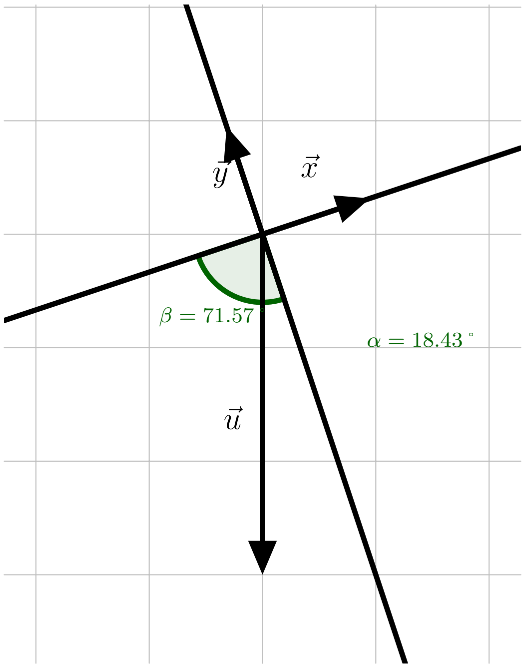
$$\vec{u'} = (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v} = \|\vec{u}\| \cos(\theta)\vec{v}$$

Exemple 8 :



On retrouve ici les coordonnées du vecteur $\vec{u}$:
$\|\vec{u}\| = \sqrt{13}$, $\left(\vec{i},\vec{u}\right) = 33,69\,^\circ$, $\left(\vec{j},\vec{u}\right) = 56,31\,^\circ$,
et $\|\vec{u}\|\cos(33,69) = 3$ de même $\|\vec{u}\|\cos(56,31) = 2$ ce qui correspond aux coordonnées de $\vec{u}$.

Exercice 8 :



Sachant que le vecteur $\vec{u}$ a une norme de 3. Les angles étant donnés par la figure, déterminer les composantes sur les deux axes dirigés par $\vec{x}$ et $\vec{y}$:

....
....
....
....

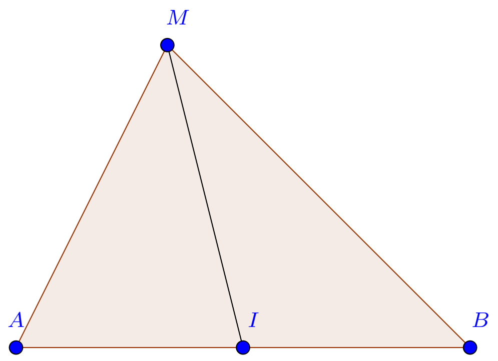
5.2 Théorème de la médiane

Propriété 6 :

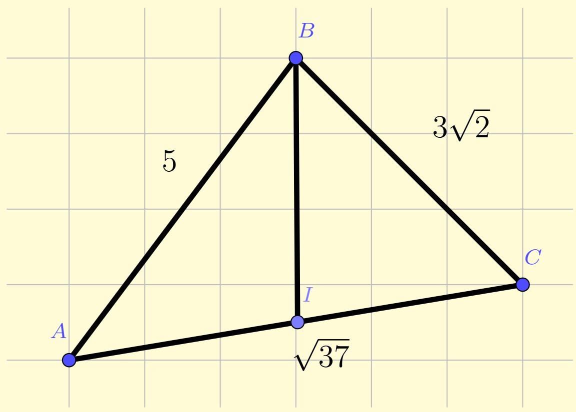
Théorème de la médiane

A et B deux points du plan, et I milieu de $[AB]$. Pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

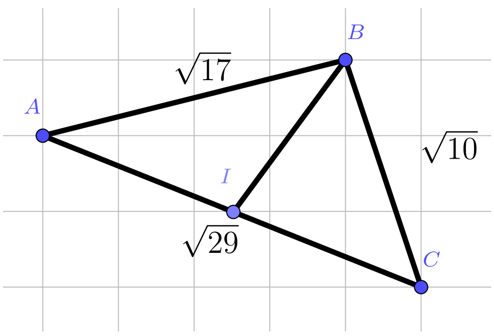


Exemple 9 :



En admettant les distances données par la figure, on peut démontrer en utilisant la propriété, que la distance BI est égale à $\frac{7}{2}$.

Exercice 9 :



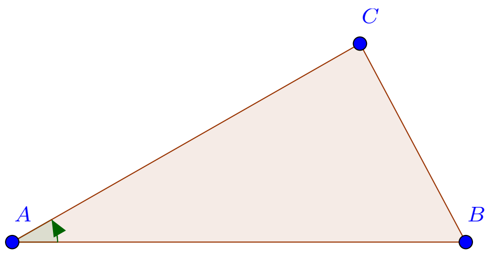
En admettant les distances données par la figure, déterminer la distance BI : ....
....
....
....
....

5.3 Théorème d'Al-Kashi

Propriété 7 :

Théorème d'Al-Kashi ou **Loi des cosinus**
Soit ABC un triangle, on a :

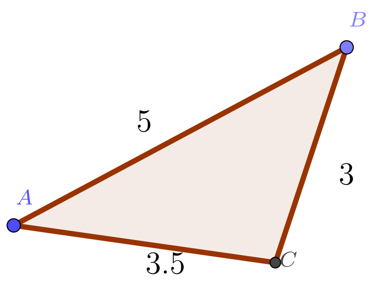
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$$



Exemple 10 :

On donne $AB = 4$, $AC = 3,8$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{6}$, déterminer la valeur de BC :

Exercice 10 : Dans le triangle suivant, déterminer une valeur approchée des 3 angles.



. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .