Chapitre 6

Fonctions de références

Table des matières

1 Fonctions affines :

1.1 Définitions

Définition 1 :

On dira que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction affine si il existe deux réels a et b tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax + b$$

a est appelé coefficient directeur.
b est appelé ordonnée à l'origine.

Exemple 1 :

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 5$ est une fonction affine, son coefficient directeur est $a = 3$, son ordonnée à l'origine est $b = 5$.
- La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x$ est une fonction affine, son coefficient directeur est $a = -1$, son ordonnée à l'origine est $b = 0$.

Exercice 1 : Pour les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, déterminer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine des fonctions affines suivantes :

1. $f_1(x) = 6x - 4 - x + 8$

....
....
....

2. $f_2(x) = 2x(x - 4) - (x + 2)(2x + 5)$

....
....
....

1.2 Variation

Propriété 1 :

- Une fonction affine est croissante sur $\mathbb{R}$ si son coefficient directeur est positif.
- Une fonction affine est décroissante sur $\mathbb{R}$ si son coefficient directeur est négatif.
- Une fonction affine est constante sur $\mathbb{R}$ si son coefficient directeur est nul.

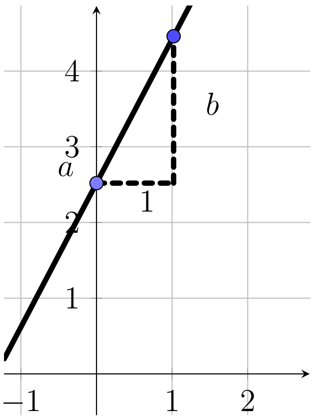
Exemple 2 :

- Le fonction $f : x \mapsto 5x - 3$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Le fonction $f : x \mapsto -3x + 2$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
-
- Le fonction $f : x \mapsto \dfrac{3}{2}$ est constante sur $\mathbb{R}$.

1.3 Courbe représentative

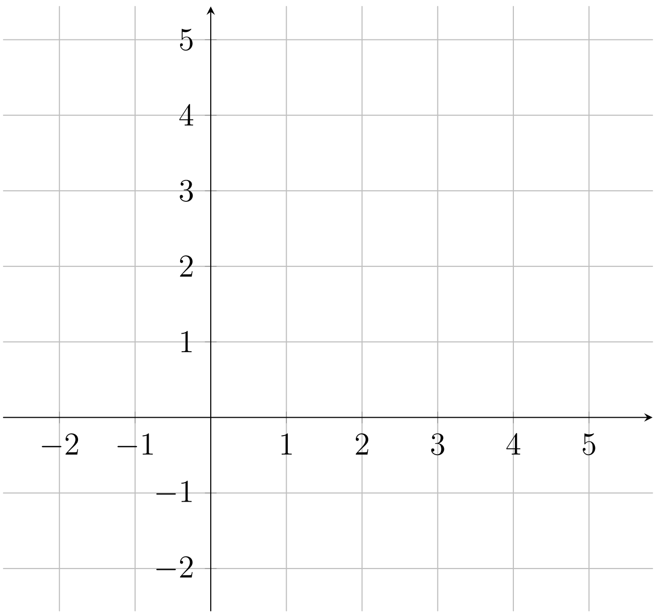
Propriété 2 :

Soient a et b deux réels, et f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
La courbe représentative de la fonction f est une droite passant par les points de coordonnées $(0, b)$ et $(1, a + b)$.



Exercice 2 : Tracer les courbes des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = -3x + 2$
- $f_2(x) = \dfrac{1}{2}x - 1$
- $f_3(x) = x + 1,5$
- $f_4(x) = 4$



2 Fonctions polynômes du second degré :

2.1 Trinôme

Définition 2 :

On dira que la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ est un trinôme si elle admettant une écriture polynômiale soit :

$$\exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ P(x) = ax^2 + bx + c$$

Un trinôme est aussi appelé polynôme du second degré.

Exemple 3 :

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ est un trinôme, on identifie les coefficients par : $a = 3\ ,\ b = -2\ ,\ c = 5$.
- La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 2$ est un trinôme, on identifie les coefficients par : $a = -1\ ,\ b = 0\ ,\ c = 2$.
- La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 8x + 7$ n'est pas un trinôme, il s'agit d'une fonction affine.

<u>Exercice 3 :</u> Pour les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, déterminer la forme polynomiale et identifier les coefficients a, b et c :

1. $f_1(x) = (2x-6)(1-x) - 4x(3x+5)$

   ....
   ....
   ....

2. $f_2(x) = 5(3x+2)^2 - (2x-3)^2$

   ....
   ....
   ....

2.2 Variation

Propriété 3 :

Soient a (non nul) ,b et c trois réels, et f le trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si a positif, on obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
ax^2+bx+c	$+\infty$ ↘	$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	↗ $+\infty$

- Si a négatif, on obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
ax^2+bx+c	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

Exemple 4 :

- Pour $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$.
  On a $a =$ .... , $b =$ .... et $c =$ ....
  Donc $-\dfrac{b}{2a} =$ ....

  Et f (...........) $=$ ....
  Ce qui donne le tableau :

x	$-\infty$	$\cdots$	$+\infty$
$f(x)$			

- Pour $f(x) = -x^2 + 7x - 10$.
  On a $a =$ .... , $b =$ .... et $c =$ ....
  Donc $-\dfrac{b}{2a} =$ ....

  Et f (...........) $=$ ....
  Ce qui donne le tableau :

x	$-\infty$	$\cdots$	$+\infty$
$f(x)$			

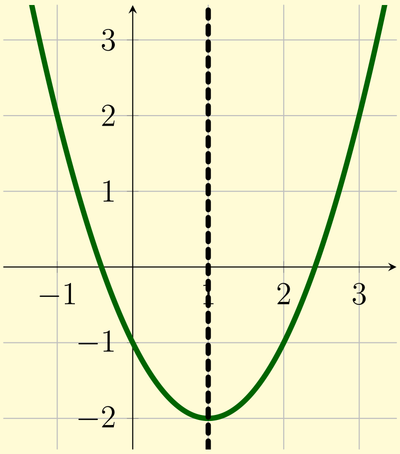
2.3 La parabole :

Définition 3 :

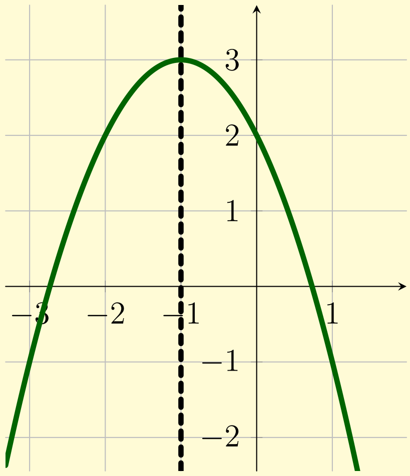
La représentation graphique d'un trinôme est appelée une parabole dont l'axe de symétrie est la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Exemple 5 :

Avec $a > 0$:

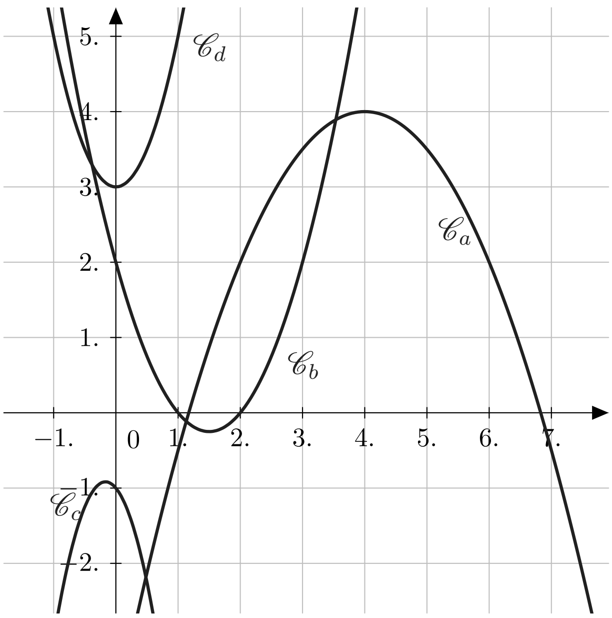


Avec $a < 0$:



Exercice 4 : Associer les fonctions à leur courbe :

1. $f_1(x) = 2x^2 + 3$
2. $f_2(x) = x^2 - 3x + 2$
3. $f_3(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4x - 4$
4. $f_4(x) = -3x^2 - x - 1$



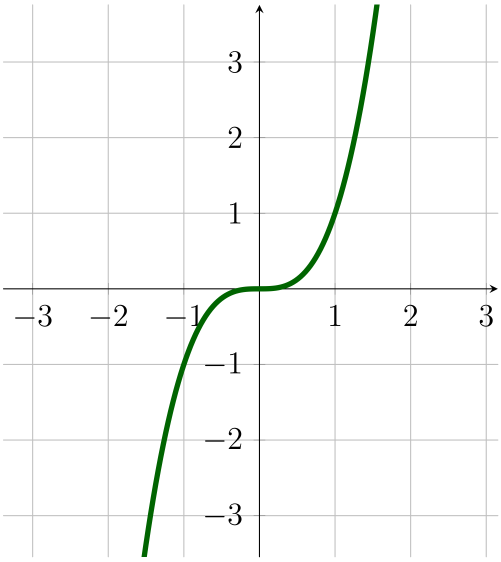
3 Polynôme du troisième degré

3.1 Fonction cube

Définition 4 :

La fonction cube est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3$$



3.2 Polynôme du troisième degré

Définition 5 :

On dira que la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ est un polynôme du troisième degré si elle admettant une écriture polynômiale de degré 3, soit :

$$\exists(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R} \text{ , } P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Exemple 6 :

La fonction f définie par $f(x) = 4(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ est un polynôme du troisième degré car :

....

....

....

....

4 Racines d'un polynôme

Définition 6 :

Pour f un polynôme, on appelle racine de f tout annulateur de la fonction.
On a donc :

$$x \text{ est un racine de } f \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Exemple 7 :

Pour la fonction $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$:

- 0 n'est pas une racine de f.
- -2 est un racine de f.

Exercice 5 : Pour $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$:

1. Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) = 3(x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

....
....
....

2. En déduire les racines de f.

....
....
....

Propriété 4 :

Pour c un réel positif :

- $x^2 = c \Leftrightarrow x = \sqrt{c}$ ou $x = -\sqrt{c}$.
- $x^3 = c \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{c}$

Exemple 8 :

- $x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 5$ ou $x = -5$
- $x^3 = 125 \Leftrightarrow x = 5$