

Chapitre 8

Dérivation

Table des matières

1	Dérivée en un point	2
2	Fonction dérivée	3
3	Dérivées des fonctions usuelles	3
4	Opérations sur les dérivées	4
5	Tangente à la courbe	5
6	Variations	6
7	Minimum, maximum	7

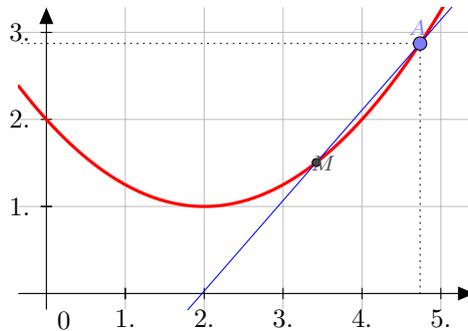
Dans tout le chapitre, f désigne une fonction définie sur un intervalle I , et on note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1 Dérivée en un point

Définition 1 :

Soit $a \in I$

Si le quotient $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers un réel l quand h tend vers 0, alors on dira que f est dérivable en a . Cette limite est appelée nombre dérivé de la fonction f en a et se note $f'(a)$. Le quotient $T_{f,a}(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ s'appelle le taux d'accroissement de f en a .



Exemple 1 :

Pour la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$, en prenant $a = 2$, on a :

$$T_{f,2}(h) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h$$

On a donc : $\lim_{h \rightarrow 0} T_{f,2}(h) = 4$. On dira donc que f est dérivable en 2, et que $f'(2) = 4$

Exercice 1 : Déterminer le nombre dérivé en $a = -1$ de la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 3$$

.....

.....

.....

.....

.....

2 Fonction dérivée

Définition 2 :
 La fonction f est dite dérivable sur I lorsqu'elle est dérivable en tout point a de I . La fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f . On la note f' .

Exemple 2 :
 Pour la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$, en prenant $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$T_{f,x}(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$
 On a donc : $\lim_{h \rightarrow 0} T_{f,x}(h) = 2x$. On dira donc que f est dérivable en tout point $x \in I$, et on a donc $f'(x) = 2x$

3 Dérivées des fonctions usuelles

On note D_f l'ensemble de définition de la fonction f , et I l'intervalle(s) sur le(s)quel(s) la fonction est dérivable :

D_f	$f(x)$	I	$f'(x)$
\mathbb{R}	$k \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}	0
\mathbb{R}	x	\mathbb{R}	1
\mathbb{R}	x^2	\mathbb{R}	$2x$
\mathbb{R}	x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}	nx^{n-1}
\mathbb{R}^*	$\frac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$

Exercice 2 : Exprimer la dérivée des fonctions suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1. $f_1(x) = x^3$
.....
2. $f_2(x) = x^7$
..... | 3. $f_3(x) = x^{12}$
.....
4. $f_4(x) = x^{15}$
..... |
|--|--|

4 Opérations sur les dérivées

Propriété 1 :

On considère deux fonctions u et v dérivables sur I .

- Pour $k \in \mathbb{R}$. La fonction ku est dérivable sur I , et $(ku)' = ku'$.
- La fonction $u + v$ est dérivable sur I , et $(u + v)' = u' + v'$.
- La fonction uv est dérivable sur I , et $(uv)' = u'v + v'u$.
- Si $\forall x \in I, v(x) \neq 0$, La fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I , et $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.
- Si $\forall x \in I, v(x) \neq 0$, La fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I , et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Exemple 3 :

On considère la fonction f définie sur $I =]2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{5x^2 - 3x + 1}{x^2 - 4}$$

On pose :

$$u(x) = 5x^2 - 3x + 1 \qquad v(x) = x^2 - 4$$

$$u'(x) = 10x - 3 \qquad v'(x) = 2x$$

On a donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(10x - 3)(x^2 - 4) - 2x(5x^2 - 3x + 1)}{(x^2 - 4)^2} \\ &= \frac{10x^3 - 3x^2 - 40x + 12 - 10x^3 + 6x^2 - 2x}{(x^2 - 4)^2} \\ &= \frac{3x^2 - 42x + 12}{(x^2 - 4)^2} \end{aligned}$$

Exercice 3 : Exprimer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 6$

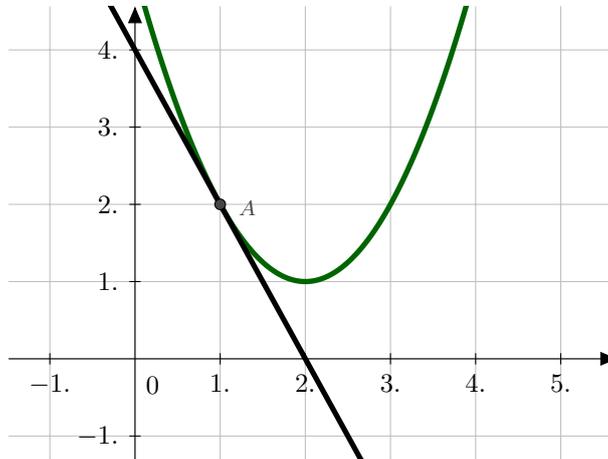
2. $f_2(x) = (5x + 3)(8 - 7x)$

3. $f_3(x) = \frac{1}{7x^2 + 1}$

4. $f_4(x) = \frac{2x^3 - 1}{x^2 + x + 1}$

5 Tangente à la courbe

Propriété 2 :
 Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a , alors la courbe \mathcal{C} admet au point $(a, f(a))$ une tangente de coefficient directeur $f'(a)$.



Propriété 3 :
 Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a , alors la courbe \mathcal{C} admet au point $(a, f(a))$ une tangente d'équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple 4 :
 Pour la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 - 4x + 5$
 La fonction est dérivable sur \mathbb{R} , et la dérivée est : $f'(x) = 2x - 4$
 Pour la tangente à la courbe au point d'abscisse $a = 1$:

- $f(1) = 2$
- |
- $f'(1) = -2$

On a donc, $T_1 : y = -2(x - 1) + 2$, soit $T_1 : y = -2x + 4$.

Exercice 4 : Déterminer l'équation réduite des tangentes au point d'abscisse a pour les fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x + 5$ en $a = -1$.

.....

2. $f_2(x) = 5x^2 + 2x + 1$ en $a = 0$

.....

6 Variations

Propriété 4 :

Soit f est dérivable sur I , les variations de la fonction f sont données par le signe de la dérivée :

- Si $f'(x)$ est positive sur I , alors f est croissante sur I .
- Si $f'(x)$ est négative sur I , alors f est décroissante sur I .

Exemple 5 :

On obtient le tableau de variation en y intégrant le tableau de signe de la dérivée. Pour la fonction définie sur $[-1; 3]$ par :

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$$

La fonction f est dérivable sur $[-1; 3]$, car c'est un polynôme, et on a :

$$\forall x \in [-1; 3] \quad , \quad f'(x) = 6x - 2$$

x	-1	$\frac{1}{3}$	3
$f'(x)$	-	0	+
f	10	$\frac{14}{3}$	26

Exercice 5 : On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 3x^3 - 13x^2 - 3x + 7$$

1. Déterminer la dérivée de la fonction f sur \mathbb{R} .

.....

2. Montrer que l'on a :

$$f'(x) = (x - 3)(9x + 1)$$

.....

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .

.....

