Chapitre 12

Complexes et géométrie

Table des matières

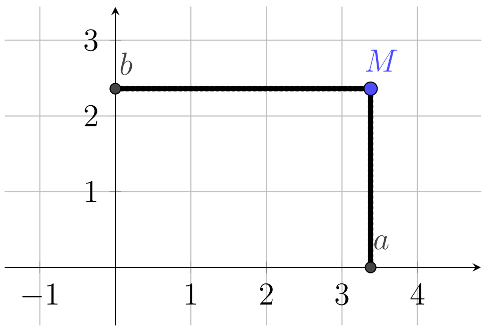
1 Nombres complexes et géométrie

1.1 Représentation graphique d'un nombre complexe

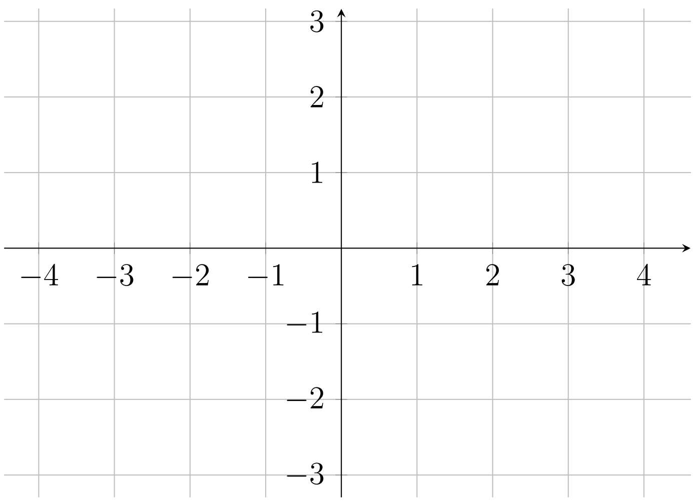
Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Définition 1 :

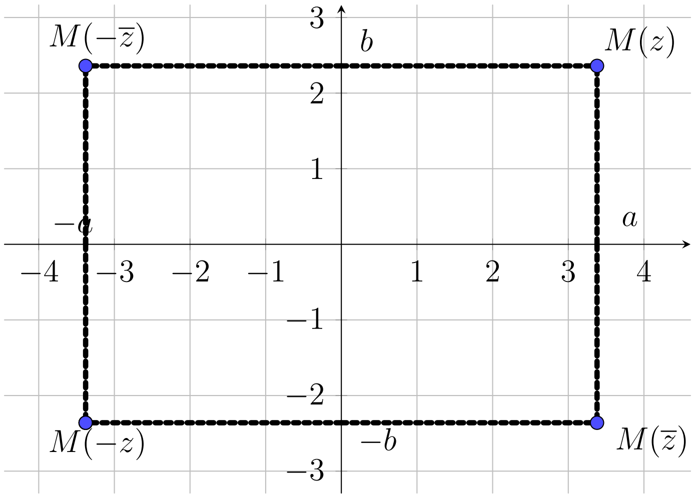
- On appelle plan complexe le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
- A tout point M de coordonnées $(a; b)$ dans le repère avec a et b des réels, on peut associer l'unique nombre complexe $z = a + ib$. Le nombre z est appelé affixe du point M. On le note z_M.
- A tout vecteur $\overrightarrow{w}(a; b)$ avec a et b des réels, on peut associer l'unique nombre complexe $z = a + ib$. Le nombre z est appelé affixe du vecteur $\overrightarrow{w}$. On le note $z_{\overrightarrow{w}}$.
- A tout nombre complexe $z = a + ib$ avec a et b des réels, on peut associer :
  - l'unique point M de coordonnées $M(a; b)$. M est l'image de z et on note $M(z)$ (se lit " M d'affixe z ").
  - l'unique vecteur $\overrightarrow{w}(a; b)$. $\overrightarrow{w}$ est appelé vecteur image de z



Exercice 1 : Placer dans le plan complexe les images A, B, C et D d'affixes $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 1 - 2i$, $z_C = -1 + 2i$ et $z_D = -1 - 2i$.



Conséquences graphiques :
- Les points $M(z)$ et $M_1(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
- Les points $M(z)$ et $M_2(-z)$ sont symétriques par rapport à O.
- Les points $M(z)$ et $M_3(-\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
- $M(z)$ appartient à l'axe des abscisses si et seulement si z est réel si et seulement si $\text{Im}(z) = 0$.
- $M(z)$ appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si z est imaginaire pur si et seulement si $\text{Re}(z) = 0$.



Propriété 1 :

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ d'affixes $z_{\overrightarrow{w}}$ et $z_{\overrightarrow{w'}}$.
- $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{w'} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{w}} = z_{\overrightarrow{w'}}$
- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w'}$ est $z_{\overrightarrow{w}} + z_{\overrightarrow{w'}}$.
- Si k est un réel, l'affixe du vecteur $k\overrightarrow{w}$ est $kz_{\overrightarrow{w}}$.

Exercice 2 : Soit $\overrightarrow{w}$ d'affixe $z_{\overrightarrow{w}} = 1 + i$ et $\overrightarrow{w'}(-1; -2)$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Déterminer l'affixe du vecteur $2\overrightarrow{w} - \overrightarrow{w'}$.

....
....
....

Propriété 2 :

Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B.
- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
- L'affixe du milieu I de $[AB]$ noté z_I est : $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Exercice 3 : Soit $A(1 + i)$ et B d'affixe $z_B = -2 + 3i$.

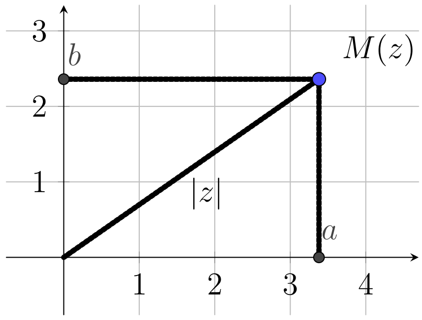
1. Déterminer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$.
2. Déterminer l'affixe du milieu C de $[AB]$.

....
....
....

1.2 Module d'un nombre complexe

Définition 2 :

Soit M le point d'affixe z dans le plan complexe.
Le module de z, noté $|z|$, est la distance OM.
On a donc : $|z| = OM$.



Propriété 3 :

- $|z|$ est un nombre réel supérieur ou égal à 0.
- Pour tout nombre complexe z écrit sous forme algébrique $z = a + ib$, on a :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad |z|^2 = z \times \overline{z}$$

- Si z est réel, alors il existe un réel a tel que $z = a$ et alors $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$ donc le module d'un réel a est la valeur absolue de a.
- Si z est imaginaire pur, alors il existe un réel b tel que $z = ib$ et alors $|z| = \sqrt{b^2} = |b|$.

Exercice 4 : Calculer le module des nombres complexes suivants :

- $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$

....

....

- $z_2 = 1 - i$

....

....

Propriété 4 :

Pour tous nombres complexes z et z' :

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}| = |z|$
- $|z| = \sqrt{z \times \overline{z}}$ ou $|z|^2 = z \times \overline{z}$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- Si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$
- Si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$
- Pour tous $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, $|z_1 \times z_2 \times \cdots \times z_n| = |z_1| \times |z_2| \times \cdots \times |z_n|$.
  En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (Inégalité triangulaire)

Exercice 5 : Calculer le module des nombres complexes suivants :

- $z_1 = \left(\sqrt{6} - i\sqrt{2}\right)^2$

  ....

  ....
- $z_2 = (-3 + 4i)\left(\sqrt{6} - i\sqrt{2}\right)$

  ....

  ....
- $z_3 = \dfrac{-3i}{\left(\sqrt{3} + i\right)^3}$

  ....

  ....

Remarque :

Pour tout nombre complexe z non nul, on a : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

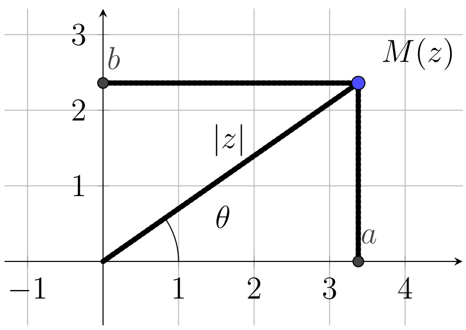
1.3 Arguments d'un nombre complexe non nul

Dans cette partie, on considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, un point M d'affixe z distinct de O donc $z \neq 0$.

Définition 3 :

Un argument de z est une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)$.

On le note $arg(z)$. On a donc : $arg(z) = \left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi] = \left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right) + k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.



Remarques :

• Si z est nul, alors l'angle orienté $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)$ n'est pas défini. On ne peut donc pas parler d'argument du nombre complexe 0.

• L'angle orienté $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)$ admet une infinité de mesures, toutes égales à un multiple de 2π près donc un nombre complexe a une infinité d'arguments. Si θ est un argument de z, on a alors : $arg(z) = \theta\ [2\pi]$.

La mesure de l'angle $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)$ appartenant à $]-\pi;\pi]$ est appelée mesure principale de l'angle et on se ramène à cette mesure principale dans les calculs d'arguments.

Propriété 5 :

On considère un nombre complexe z non nul.

• $z \in \mathbb{R}^{*+} \quad \Leftrightarrow \quad \arg(z) = 0\ [2\pi]$

• $z \in \mathbb{R}^{*-} \quad \Leftrightarrow \quad \arg(z) = \pi\ [2\pi]$

• $z \in i\mathbb{R}^{+} \quad \Leftrightarrow \quad \arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

• $z \in i\mathbb{R}^{-} \quad \Leftrightarrow \quad \arg(z) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Méthode pour déterminer un argument :

Soit z un nombre complexe non nul tel que $z = a + ib$ avec a et b des réels.

Pour déterminer un argument de z, on suit la démarche suivante :

• On calcule et on simplifie au maximum le module de z : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

• Soit θ un argument de z.

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

Ayant le cosinus et le sinus de l'angle, on peut grâce au cercle trigonométrique et aux valeurs remarquables du cosinus et du sinus, déterminer un argument de z.

Exercice 6 : Déterminer un argument des nombres complexes suivants :

- $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$

  ....
  ....
  ....

- $z_2 = 1 - i$

  ....
  ....
  ....

Propriété 6 :

Pour tous nombres complexes non nuls z et z' :

- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \; [2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \; [2\pi]$
- $\arg(-\overline{z}) = -\arg(z) + \pi \; [2\pi]$
- $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') \; [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z) \; [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) \; [2\pi]$

Exercice 7 : Calculer un argument dans $]-\pi;\pi]$ des nombres complexes suivants :

- $z_1 = (2 - 2i)\left(\sqrt{3} + i\right)$

  ....
  ....
  ....

- $z_2 = \dfrac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2i}$

  ....
  ....
  ....

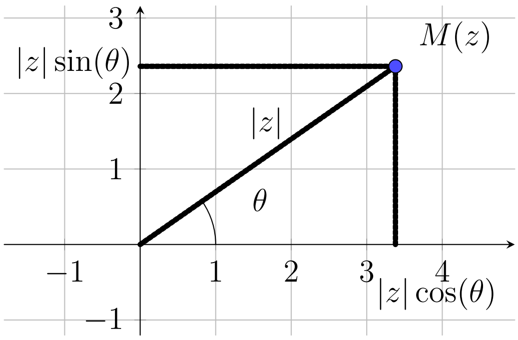
2 Formes trigonométriques

Propriété 7 :

Pour tout nombre complexe z non nul $z = a + ib$ où a et b sont réels et θ un argument de z, alors on a :

$$a = |z| \times \cos(\theta) \qquad \text{et} \qquad b = |z| \times \sin(\theta)$$

Ainsi, on a : $z = |z|\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$



Définition 4 :

Tout nombre complexe non nul z de module $|z|$ et ayant pour argument θ, s'écrit sous la forme :

$$z = |z|\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$$

Cette forme est appelée forme trigonométrique de z.

Méthodes de calcul pour passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et l'inverse :

• Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique :

Si $z = a + ib$ avec a et b des réels, alors :

- calcul du module : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- calcul d'un argument : soit θ un argument de z :

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \qquad \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

Grâce au cercle trigonométrique, vous pouvez lire l'angle θ et on a alors : $z = |z|\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$

• Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique :

On doit déterminer les valeurs de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ puis on développe et on trouve ainsi la forme algébrique de z.

Exercice 8 :

1. Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

   - $z_1 = \sqrt{3} - i$

     ....

     ....

   - $z_2 = -2 - 2i$

     ....

     ....

2. Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

   - $z_3 = 2\left(\cos(\frac{-2\pi}{3}) + i\sin(\frac{-2\pi}{3})\right)$

     ....

     ....

   - $z_4 = 4\left(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6})\right)$

     ....

     ....