Chapitre 7

# Nombres Complexes

## Table des matières

# 1 Définition

**Définition 1 :**

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$ ,de nombres appelés nombres complexes, tel que :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$ ;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication pour lesquelles les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$ ;
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre non réel, noté $i$, vérifiant $i^2 = -1$ ;
- Tout nombre complexe $z$ s'écrit de façon unique sous sa forme algébrique :

$$z = a + ib \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des réels.}$$

**Exemple 1 :**

- $(2 + 3i)(5 - i) =$..........................................................................
- $(-1 + 2i)(2 - 5i) =$..........................................................................
- $(4 - 3i)^2 =$..........................................................................

**Définition 2 :**

Pour un nombre complexe $z$ de forme algébrique $z = a + ib$, on a

- Le réel $a$ est appelé partie réelle de $z$ et est noté $\text{Re}(z)$.
- Le réel $b$ est appelé partie imaginaire de $z$ et est noté $\text{Im}(z)$.
- Si $b = 0$ alors $z = a + 0i$ est noté $z = a$ et $z$ est un réel.
- Si $a = 0$ alors $z = 0 + ib$ est noté $z = ib$ et $z$ est appelé imaginaire pur.
- Le complexe $0 + 0i$ noté $0$ est à la fois réel et imaginaire pur.

**Exemple 2 :**

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des complexes suivants :

- $z = 5 - 3i$..........................................................................
- $z = -4 + i$..........................................................................

**Propriété 1 :**

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire. Autrement dit, soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes :

- $z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Re}(z) = 0 \text{ et } \text{Im}(z) = 0$
- $z = z' \quad \Leftrightarrow \quad \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \quad \text{et} \quad \text{Im}(z) = \text{Im}(z')$

**Exemple 3 :**

Déterminer le nombre complexe $z$ vérifiant l'équation suivante :

$$2z - 2 = 3iz - 16i$$

## 2 Conjugué d'un nombre complexe

**Définition 3 :**

Soit $z$ un complexe de forme algébrique $z = a + ib$, $a$ et $b$ réels. On appelle conjugué du complexe $z$, le complexe noté $\bar{z}$ défini par :

$$\overline{z} = a - ib$$

**Exemple 4 :**

Déterminer le conjugué des complexes suivants :

- $z = 5 - 3i$.........................................................................
- $z = -4 + i$.........................................................................

**Propriété 2 :**

- $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
- $\overline{z} = -z \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$, où $i\mathbb{R}$ est l'ensemble des imaginaires pures.
- Pour $z$ un complexe de forme algébrique $z = a + ib$, on a :

$$z \times \overline{z} = a^2 + b^2$$

.

**Exemple 5 :**

Pour $z$ un complexe de forme algébrique $z = 5 - 4i$, on a :

$z \times \overline{z} =$ ....................................................................

.....................................................................

.....................................................................

**Exemple 6 :**

**Méthode pour trouver l'inverse d'un nombre complexe** :

Pour $z = 4 - 2i$, déterminer la forme algébrique de :

$\frac{1}{z} =$ ....................................................................

.....................................................................

.....................................................................

**Exemple 7 :**

Déterminer la forme algébrique de $Z$ :

$Z = \frac{2-i}{3+2i} =$ ....................................................................

.....................................................................

.....................................................................