DS 5

Devoir sur table

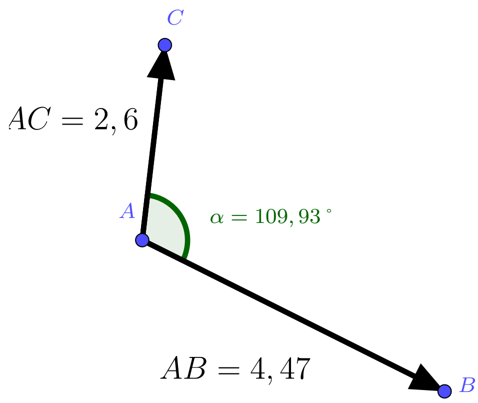
(1 heure)

Nom :.......................

Prénom :.......................

Exercice 1 : (2 points)

Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans le cas suivant :



. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

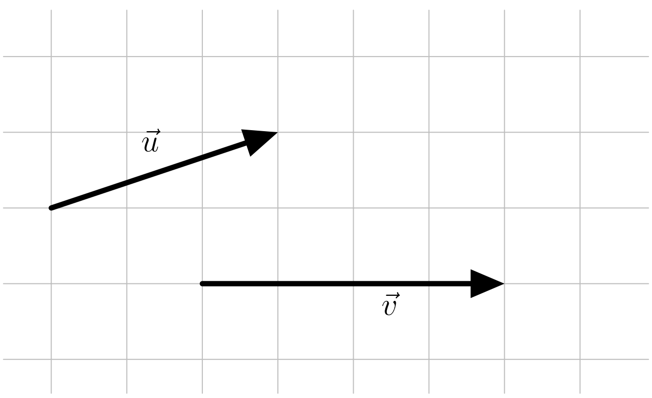
Solution :

On dispose de la formule :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\| \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 4,47 \times 2.6 \times cos(109.93) = -4$

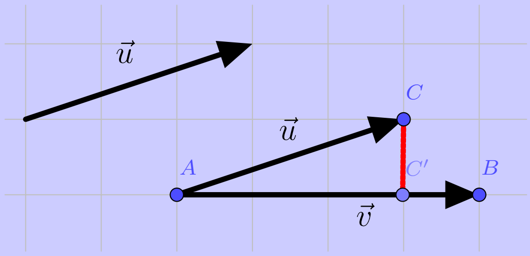
Exercice 2 : (2 points)

En utilisant les carreaux comme unité, déterminer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.(On pourra rajouter des points, et on laissera les traits de construction.)



. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Solution :



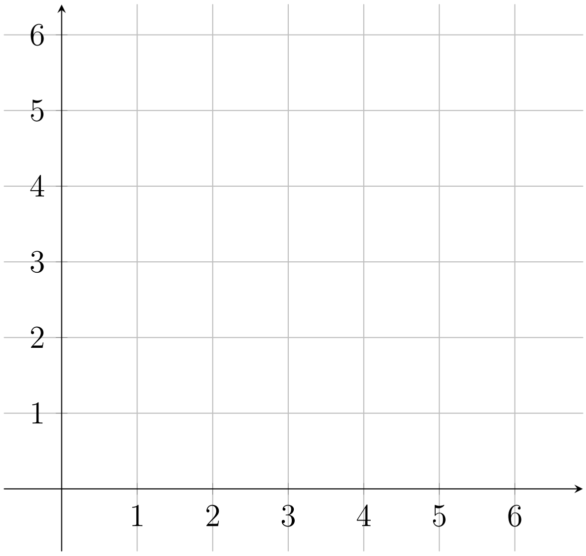
En utilisant le projeté, on a donc :

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= AC' \times AB \\ &= 3 \times 4 \\ &= 12 \end{aligned}$$

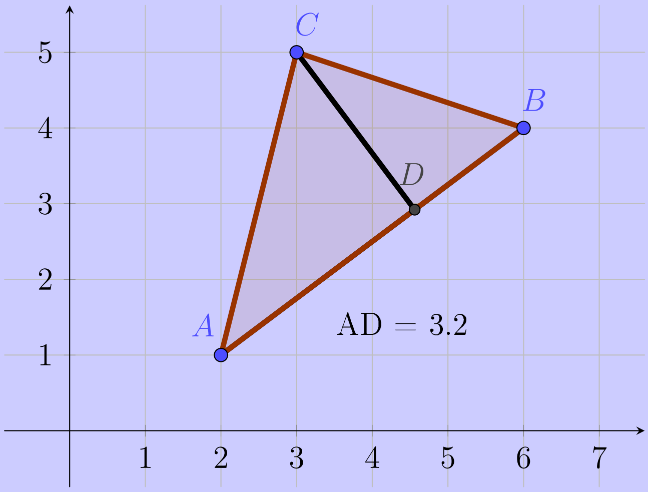
Exercice 3 : (6 points)

On considère les points $A\,(2,1)$, $B(6,4)$ et $C(3,5)$. On note D le pied de la hauteur issue de C.

1. Représenter les points A, B, C et D :



Solution :



2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Solution :

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6-2\\4-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-2\\5-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

3. Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Solution :

On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 1 + 3 \times 4 = 4 + 12 = 16$.

4. Déterminer la distance AB.

Solution :

On a $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$.

5. En déduire la distance AD. (On constate en effet que le point D est le projeté de C sur (AB).

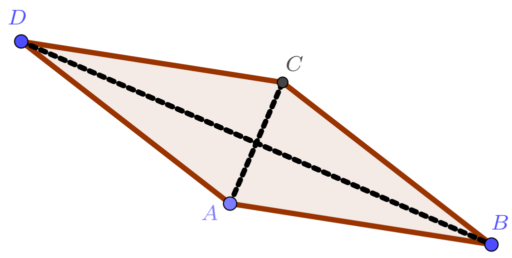
Solution :

Sachant que D est le projeté orthogonal de C sur (AB), on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16 &\Leftrightarrow AD \times AB = 16 \\ &\Leftrightarrow 5AD = 16 \\ &\Leftrightarrow AD = \frac{16}{5} \end{aligned}$$

Exercice 4 : (6 points)

On considère le losange $ABCD$ de côté 10. On sait de plus que $AC = 5$.



1. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$. (On donnera un résultat en degrés arrondi à l'unité.)

Solution :

En utilisant le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ABC, on obtient :

$$\begin{array}{rrcl} & AC^2 & = & AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) \\ \Leftrightarrow & 2 \times AB \times BC \cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) & = & AB^2 + BC^2 - AC^2 \\ \Leftrightarrow & \cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) & = & \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \times AB \times BC} \\ \Leftrightarrow & \cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) & = & \dfrac{10^2 + 10^2 - 5^2}{2 \times 10 \times 10} \\ \Leftrightarrow & \cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) & = & \dfrac{7}{8} \\ \Leftrightarrow & \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) & = & \cos^{-1}\left(\dfrac{7}{8}\right) \\ \Leftrightarrow & \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) & = & 29 \text{ (arrondi à l'unité)} \end{array}$$

On trouve donc une mesure de 29°.

2. On admet que l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = 151°$.
Déterminer la longueur de la diagonale BD.(on donnera le résultat à 10^{-1} près.)

Solution :

En utilisant le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ABD, on obtient :

$$\begin{array}{rrcl} & BD^2 & = & AB^2 + AD^2 - 2 \times AB \times AD \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \\ \Leftrightarrow & BD^2 & = & 10^2 + 10^2 - 2 \times 10 \times 10 \times \cos(151) \\ \Leftrightarrow & BD^2 & = & 200 - 200\cos(151) \\ \Rightarrow & BD & = & \sqrt{200 - 200\cos(151)} \\ \Rightarrow & BD & = & 19,4 \text{ (à } 10^{-1} \text{ près)} \end{array}$$

On trouve donc une mesure de $19,4$ à 10^{-1} près.

Exercice 5 : (2 points)
On considère les points $A(5,12)$, $B(12,4)$ et $C(45,47)$.
Montrer que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Solution :

Pour montrer que les droites sont perpendiculaires, il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux :
On a :
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}12-5\\4-12\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}45-5\\47-12\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}40\\35\end{pmatrix}$
Le produit scalaire :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 7\times 40 + (-8)\times 35 = 0$. Donc les vecteurs sont orthogonaux, donc les droites sont perpendiculaires.

Exercice 6 : (2 points)
On considère un réel a.
Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix}5a+2\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\4a+1\end{pmatrix}$
Déterminer la valeur de a pour que les vecteurs soient orthogonaux :

Solution :

Des vecteurs non nuls sont orthogonaux si le produit scalaire est nul. On veut donc :

$$\begin{array}{rrcl} & \vec{u}\cdot\vec{v} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (5a+2)\times 3 + (-2)(4a+1) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & 15a+6-8a-2 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & 7a & = & -4 \\ \Leftrightarrow & a & = & -\dfrac{4}{7} \end{array}$$

On trouve donc $a = -\dfrac{4}{7}$