DS 4

Devoir sur table

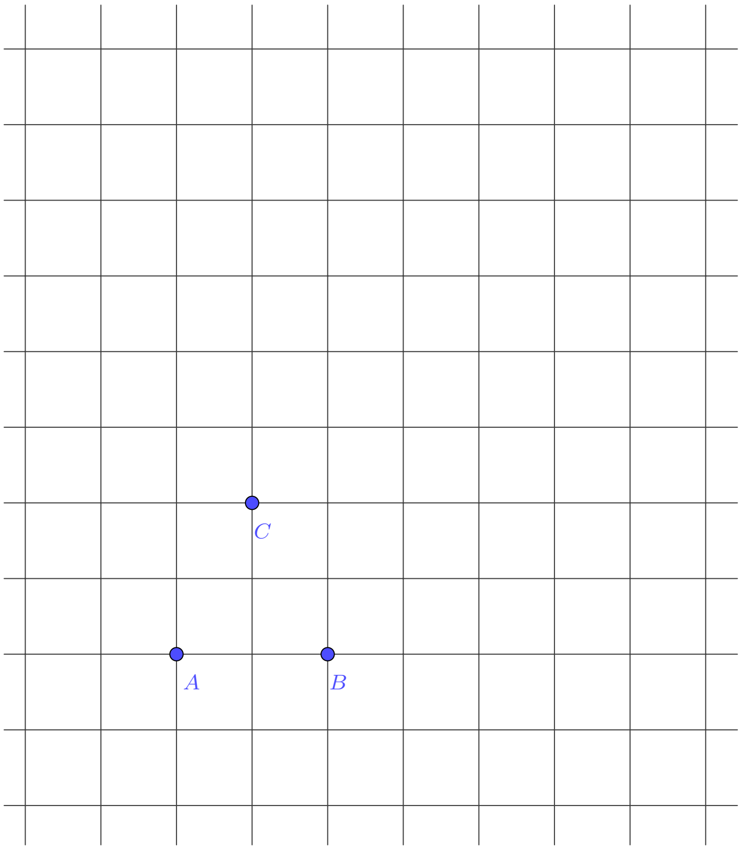
(1 heure)

Nom :......................
Prénom :......................

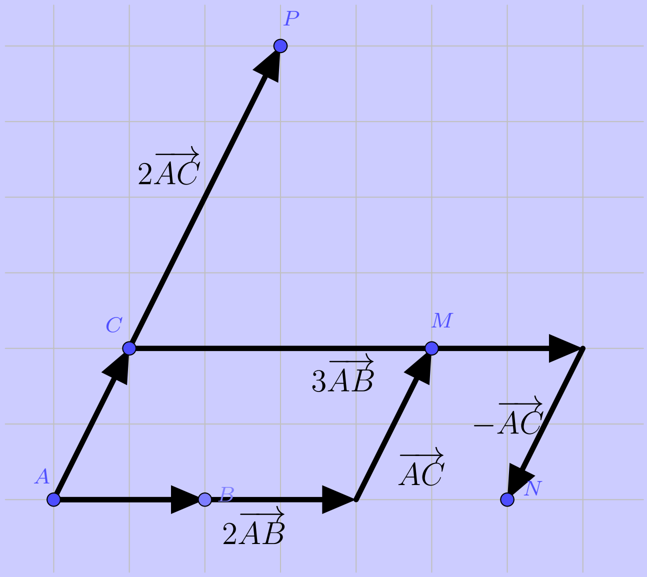
Exercice 1 : (7 points)
Soit ABC est un triangle.

1. Construire les point M, N et P définis par :

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad , \quad \overrightarrow{CN} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \quad , \quad \overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{AC}$$



Solution :



2. Montrer que l'on a :
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

Solution :

On a :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} && \text{(Relation de Chasles)}\\ &= -2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

3. Montrer que l'on a :
$$\overrightarrow{PN} = 3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$$

Solution :

On a :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{PN} &= \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CN} && \text{(Relation de Chasles)}\\ &= -2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\\ &= 3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

4. Montrer que l'on a :
$$\overrightarrow{PN} = 3\overrightarrow{MN}$$

En déduire que les points M, N et P sont alignés.

Solution :

On constate que :

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{MN} &= 3\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right) \\ &= 3\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{PN} \end{aligned}$$

On a donc $\overrightarrow{PN} = 3\overrightarrow{MN}$, donc les vecteurs sont colinéaires, donc les points sont alignés.

Exercice 2 : (5 points)

On considère les points $A\,(5;3)$, $B\,(1;2)$ et $C\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$.

1. Calculer les coordonnées de I milieu de $[AB]$.

Solution :

On a $I\left(\dfrac{5+1}{2};\dfrac{3+2}{2}\right)$ soit $I\left(3;\dfrac{5}{2}\right)$

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Solution :

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\-\dfrac{3}{2}\end{pmatrix}$

3. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Solution :

On a :

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-4\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)-(-1)\times(-6)=6-6=0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

4. En déduire que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires.

Solution :

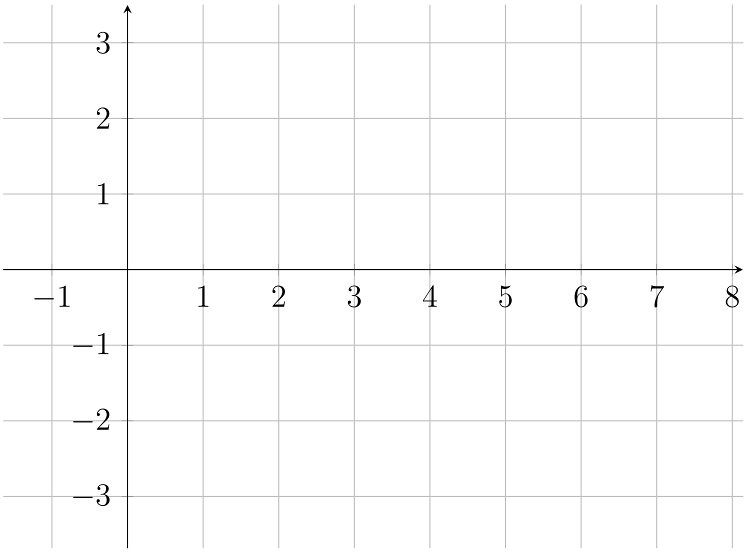
Sachant que I est le milieu de $[AB]$, donc $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Sachant que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, on a donc bien $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI}$ colinéaires.

Exercice 3 : (6 points)

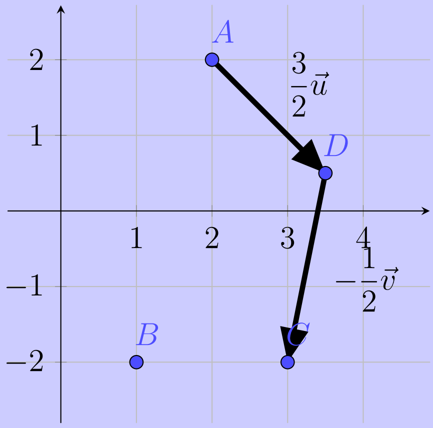
On considère les points $A\,(2;2)$, $B\,(1;-2)$. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

On note C le points tel que $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$.

1. Placer les points A, B et C.



Solution :



2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Solution :

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} \frac{3}{2}\times 1 - \frac{1}{2}\times 1 \\ \frac{3}{2}\times(-1) - \frac{1}{2}\times 5 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

3. En déduire les coordonnées du point C.

Solution :

On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ donc :

$\left\{\begin{array}{rcl} x_C - x_A & = & 1 \\ y_C - y_A & = & -4 \end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{rcl} x_C - 2 & = & 1 \\ y_C - 2 & = & -4 \end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{rcl} x_C & = & 3 \\ y_C & = & -2 \end{array}\right.$ soit $C(3,-2)$.

4. Déterminer les distances AB et AC.

Solution :

- $AB = \sqrt{(1-2)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{17}$
- $AC = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{17}$

5. Que dire du triangle ABC ?

Solution :

Les distances étant identiques, donc le triangle est isocèle.

Exercice 4 : (2 points)
On considère un réel a.
Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5a \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} a-3 \\ -3 \end{pmatrix}$
Déterminer la valeur de a pour que les vecteurs soient colinéaires :

Solution :

On veut :

$$\begin{array}{lrcl} & \text{Det}(\vec{u},\vec{v}) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{vmatrix} 5a & a-3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & 5a\times(-3)-2(a-3) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & -15a-2a+6 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & -17a & = & -6 \\ \Leftrightarrow & a & = & \dfrac{6}{17} \end{array}$$

On trouve donc $a = \dfrac{6}{17}$