

DS 3

Devoir sur table

(1 heure)

Nom :

Prénom :

Exercice 1 : (2 points)

Calculer les quatre premiers termes des suites suivantes :

1. La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = 4n^2 - 2n + 3$:

Solution :

0.25 points par calcul :

$$u_0 = 4 \times 0^2 - 2 \times 0 + 3 = 3$$

$$u_1 = 4 \times 1^2 - 2 \times 1 + 3 = 5$$

$$u_2 = 4 \times 2^2 - 2 \times 2 + 3 = 15$$

$$u_3 = 4 \times 3^2 - 2 \times 3 + 3 = 33$$

2. La suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{2n}{n^2 + 1}$:

Solution :

0.25 point par calcul :

$$v_0 = \frac{2 \times 0}{0^2 + 1} = 0$$

$$v_1 = \frac{2 \times 1}{1^2 + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$v_2 = \frac{2 \times 2}{2^2 + 1} = \frac{4}{5}$$

$$v_3 = \frac{2 \times 3}{3^2 + 1} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Exercice 2 : (4 points)

Calculer les quatre premiers termes des suites suivantes :

1. La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 4u_n - 8 \end{cases}$

Solution :

0.5 point par calcul :

$$u_0 = 3$$

$$u_1 = 4u_0 - 8 = 4 \times 3 - 8 = 4$$

$$u_2 = 4u_1 - 8 = 4 \times 4 - 8 = 8$$

$$u_3 = 4u_2 - 8 = 4 \times 8 - 8 = 24$$

2. La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 3}{u_n} \end{cases}$$

**Solution :**

0.5 points par calcul :

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_1 &= \frac{2u_0 - 3}{u_0} = \frac{2 \times 1 - 3}{1} = -1 \\ u_2 &= \frac{2u_1 - 3}{u_1} = \frac{2 \times (-1) - 3}{-1} = 5 \\ u_3 &= \frac{2u_2 - 3}{u_2} = \frac{2 \times 5 - 3}{5} = \frac{7}{5} \end{aligned}$$

Exercice 3 : (3 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 4n^2 - 3n + 5$.

1. Montrer que, pour tout n , on a :

$$u_{n+1} - u_n = 8n + 1$$

Solution :

2 points :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 4(n+1)^2 - 3(n+1) + 5 - (4n^2 - 3n + 5) \\ &= 4(n^2 + 2n + 1) - 3(n+1) + 5 - (4n^2 - 3n + 5) \\ &= 4n^2 + 8n + 4 - 3n - 3 + 5 - 4n^2 + 3n - 5 \\ &= 8n + 1 \end{aligned}$$

2. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

Solution :

1 point :

Sachant que n est un entier naturel, $n \geq 0$, donc $8n \geq 0$, ce qui entraîne que $8n + 1 \geq 0$. La différence est donc positive, donc la suite (u_n) est croissante.

Exercice 4 : (3 points)

On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $R = -\frac{3}{2}$.

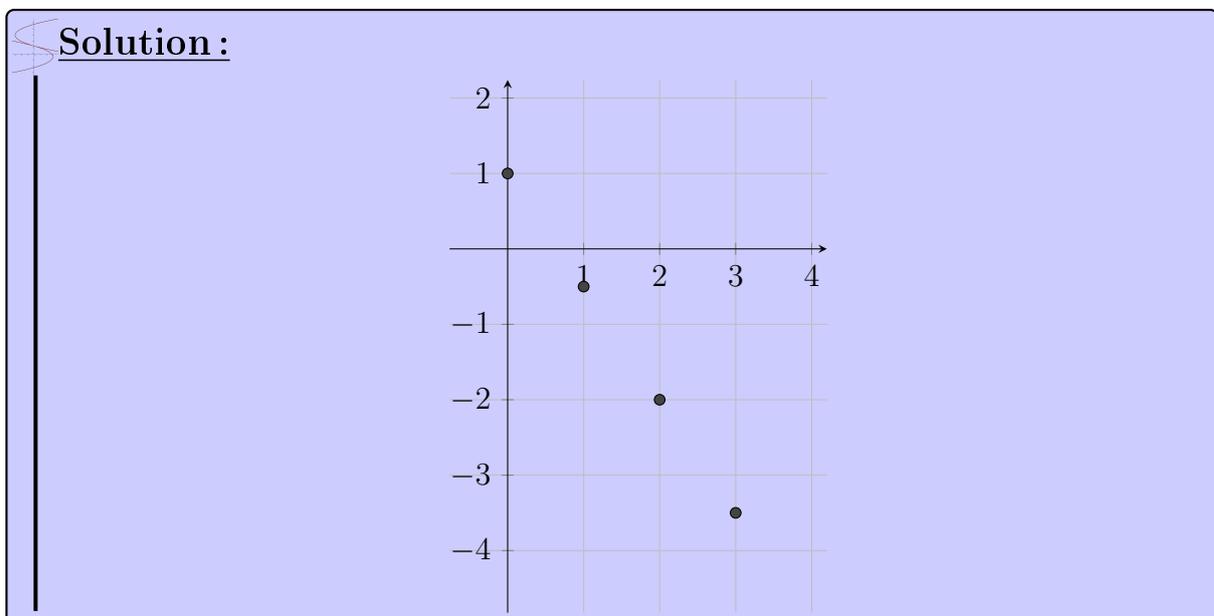
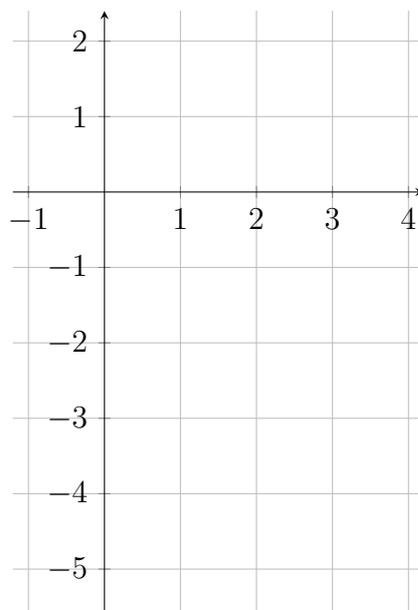
1. Déterminer les 4 premiers termes de la suite.

Solution :

2 points par calcul :

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_1 &= u_0 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \\ u_2 &= u_1 - \frac{3}{2} = -2 \\ u_3 &= u_2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

2. Représenter la suite (u_n) .



Exercice 5 : (4 points)

1. La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = 3(n + 2) - 5n$$

Montrer que la suite (u_n) est arithmétique (on précisera la raison).

Solution :

2 points :

Pour tout n entier, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3(n + 1 + 2) - 5(n + 1) - (3(n + 2) - 5n) \\ &= 3(n + 3) - 5(n + 1) - (3n + 6 - 5n) \\ &= 3n + 9 - 5n - 5 - 3n - 6 + 5n \\ &= -2 \end{aligned}$$

On peut donc dire que

la suite (u_n) est arithmétique et que sa raison est $R = -2$.

2. La suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = n(3n + 2)$$

Montrer que la suite (v_n) n'est pas arithmétique.

Solution :

2 points :

$$u_0 = 0(3 \times 0 + 2) = 0$$

$$u_1 = 1(3 \times 1 + 2) = 5$$

$$u_2 = 2(3 \times 2 + 2) = 16$$

On constate que $u_1 - u_0 = 5 - 0 = 5$ alors que $u_2 - u_1 = 16 - 5 = 11$. L'écart n'est donc pas constant, la suite n'est donc pas arithmétique.

Exercice 6 : (4 points)

L'association des jeunes d'une ville a été créée en 2020. En 2020, elle compte 50 membres. On estime que le nombre de membres augmente de 6 % chaque année.

Les résultats seront approchés à l'unité.

1. Déterminer le nombre de membres en 2021, puis 2022.

Solution :

1 point par calcul :

- En 2021, le nombre de jeunes est augmenté et 6 % : $50 \times 1,06 = 53$
Il y a donc 53 jeunes en 2021.
- En 2022, le nombre de jeunes est augmenté et 6 % : $53 \times 1,06 = 56,18$
Il y a donc 56 jeunes en 2022.

On note (u_n) le nombre de membres en fonction de l'année n , où n est le nombre d'années écoulées depuis 2020.

2. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.

Solution :

1 point :

Chaque année, il y a une augmentation de 6 %, ce qui correspond à une multiplication de 1,06. La suite est donc bien géométrique, de raison $q = 1,06$.

On admet que la suite vérifie la relation :

$$u_n = 50 \times 1,06^n$$

Un fondateur de l'association estime que le nombre d'adhérents aura doublé en 2032.

3. A l'aide de la calculatrice, confirmer l'affirmation du fondateur.

Solution :

1 point :

On cherche la valeur de u_{12} :

$$u_{12} = 50 \times 1,06^{12} = 101 \text{ à l'unité.}$$

On peut vérifier que ce n'est pas le cas en 2031 :

$$u_{11} = 50 \times 1,06^{11} = 95 \text{ à l'unité.}$$

Ce qui correspond à l'affirmation.

4. (*Question facultative*) Compléter en Python la fonction `seuil` qui prend en argument un entier `niveau` et qui renvoie le rang correspondant au dépassement par la suite du seuil.

```
def seuil(niveau) :  
    u = .....  
    n = 0  
    while u < ..... :  
        u = .....  
        n = n+1  
    return n
```

Correction

```
def seuil(niveau) :  
    u = 50  
    n = 0  
    while u < niveau :  
        u = 1.06 * u  
        n = n+1  
    return n
```
