DS 3

Devoir sur table

(1 heure)

Nom :......................
Prénom :......................

Exercice 1 : (2 points)
Calculer les quatre premiers termes des suites suivantes :

1. La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = 3n^2 - 2n + 4$:

Solution :
0.25 points par calcul :
$u_0 = 3 \times 0^2 - 2 \times 0 + 4 = 4$
$u_1 = 3 \times 1^2 - 2 \times 1 + 4 = 5$
$u_2 = 3 \times 2^2 - 2 \times 2 + 4 = 12$
$u_3 = 3 \times 3^2 - 2 \times 3 + 4 = 25$

2. La suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{4n}{n^2+1}$:

Solution :
0.25 points par calcul :
$v_0 = \dfrac{4 \times 0}{0^2+1} = 0$
$v_1 = \dfrac{4 \times 1}{1^2+1} = \dfrac{4}{2} = 2$
$v_2 = \dfrac{4 \times 2}{2^2+1} = \dfrac{8}{5}$
$v_3 = \dfrac{4 \times 3}{3^2+1} = \dfrac{12}{10} = \dfrac{6}{5}$

Exercice 2 : (4 points)
Calculer les quatre premiers termes des suites suivantes :

1. La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n - 7 \end{cases}$

Solution :
0.5 points par calcul :
$u_0 = 2$
$u_1 = 5u_0 - 7 = 5 \times 2 - 7 = 3$
$u_2 = 5u_1 - 7 = 5 \times 3 - 7 = 8$
$u_3 = 5u_2 - 7 = 5 \times 8 - 7 = 33$

2. La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 4}{u_n} \end{cases}$

Solution :

0.5 points par calcul :

$u_0 = 1$

$u_1 = \dfrac{3u_0 - 4}{u_0} = \dfrac{3 \times 1 - 4}{1} = -1$

$u_2 = \dfrac{3u_1 - 4}{u_1} = \dfrac{3 \times (-1) - 4}{-1} = 7$

$u_3 = \dfrac{3u_2 - 4}{u_2} = \dfrac{3 \times 7 - 4}{7} = \dfrac{17}{7}$

Exercice 3 : (3 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 5n^2 - 2n + 3$.

1. Montrer que, pour tout n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = 10n + 3$$

Solution :

2 points :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 5(n+1)^2 - 2(n+1) + 3 - (5n^2 - 2n + 3) \\ &= 5(n^2 + 2n + 1) - 2(n+1) + 3 - (5n^2 - 2n + 3) \\ &= 5n^2 + 10n + 5 - 2n - 2 + 3 - 5n^2 + 2n - 3 \\ &= 10n + 3 \end{aligned}$$

2. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

Solution :

1 point :

Sachant que n est un entier naturel, $n \geq 0$, donc $10n \geq 0$, ce qui entraine que $10n + 3 \geq 0$. La différence est donc positive, donc la suite (u_n) est croissante.

Exercice 4 : (3 points)

On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $R = -\dfrac{3}{2}$.

1. Déterminer les 4 premiers termes de la suite.

Solution :

2 points par calcul :

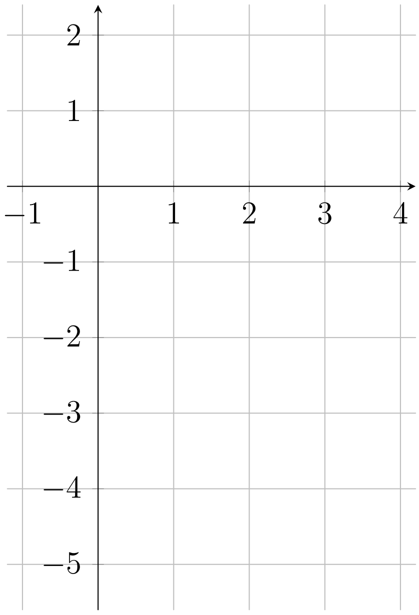
$u_0 = 2$

$u_1 = u_0 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$

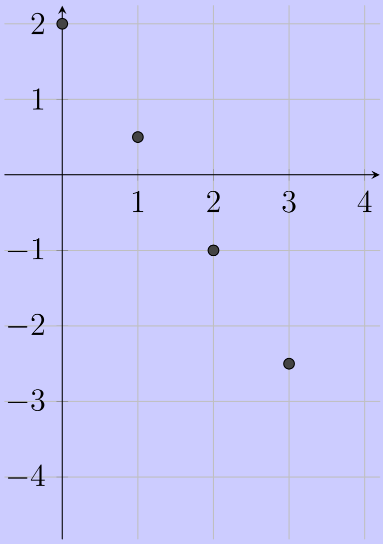
$u_2 = u_1 - \dfrac{3}{2} = -1$

$u_3 = u_2 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{5}{2}$

2. Représenter la suite (u_n) .



Solution :



Exercice 5 : (4 points)

1. La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = 2(n+3) - 5n$$

Montrer que la suite (u_n) est arithmétique (on précisera la raison).

Solution :

2 points :
Pour tout n entier, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1+3) - 5(n+1) - (2(n+3) - 5n) \\ &= 2(n+4) - 5(n+1) - (2n+6-5n) \\ &= 2n+8-5n-5-2n-6+5n \\ &= -3 \end{aligned}$$

On peut donc dire que la suite (u_n) est arithmétique et que sa raison est $R = -3$.

2. La suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = n(2n+3)$$

Montrer que la suite (v_n) n'est pas arithmétique.

Solution :

2 points :
$u_0 = 0(2 \times 0 + 3) = 0$
$u_1 = 1(2 \times 1 + 3) = 5$
$u_2 = 2(2 \times 2 + 3) = 14$
On constate que $u_1 - u_0 = 5 - 0 = 5$ alors que $u_2 - u_1 = 14 - 5 = 9$. L'écart n'est donc pas constant, la suite n'est donc pas arithmétique.

Exercice 6 : (4 points)
L'association des jeunes d'une ville a été créée en 2020. En 2020, elle compte 50 membres. On estime que le nombre de membres augmente de 8 % chaque année.
Les résultats seront approchés à l'unité.

1. Déterminer le nombre de membres en 2021, puis 2022.

Solution :
1 point par calcul :

- En 2021, le nombre de jeunes est augmenté et 8 % : $50 \times 1,08 = 54$
  Il y a donc 54 jeunes en 2021.
- En 2022, le nombre de jeunes est augmenté et 8 % : $54 \times 1,08 = 58,32$
  Il y a donc 58 jeunes en 2022.

On note (u_n) le nombre de membres en fonction de l'année n, où n est le nombre d'années écoulées depuis 2020.

2. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.

Solution :
1 point :
Chaque année, il y a une augmentation de 8 %, ce qui correspond à une multiplication de $1,08$. La suite est donc bien géométrique, de raison $q = 1,08$.

On admet que la suite vérifie la relation :

$$u_n = 50 \times 1,08^n$$

Un fondateur de l'association estime que le nombre d'adhérents aura doublé en 2030.

3. A l'aide de la calculatrice, confirmer l'affirmation du fondateur.

Solution :
1 points :
On cherche la valeur de u_10 :
$u_{10} = 50 \times 1,08^{10} = 108$ à l'unité.
On peut vérifier que ce n'est pas le cas en 2029 :
$u_9 = 50 \times 1,08^9 = 99$ à l'unité.
Ce qui correspond à l'affirmation.

4. (*Question facultative*) Compléter en Python la fonction `seuil` qui prend en argument un entier `niveau` et qui renvoie le rang correspondant au dépassement par la suite du seuil.

```
def seuil(niveau) :
    u = ..........
    n = 0
    while u < ............ :
        u = ...................
        n = n+1
    return n
```

Correction

```
def seuil(niveau) :
    u = 50
    n = 0
    while u < niveau :
        u = 1.08 * u
        n = n+1
    return n
```