Fiche 4

# Fonctions

**Définition 1 :**

On considère une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ ( soit un intervalle, soit une union d'intervalle).
Une fonction $f$, définie sur un $\mathcal{D}$, est un objet mathématique qui permet d'associer à un nombre réel $x \in \mathcal{D}$, un unique nombre réel , noté $f(x)$ et appelé l'image de $x$ par la fonction $f$.

**Exemple 1 :**

Par exemple la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f: & [-6,5] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & -0,5x+3 \end{array}$$

permet d'associer à chaque nombre, un autre nombre :

- $f(-6) =$ .... , l'image de $-6$ par la fonction $f$ est .....
- $f(0) =$ .... , l'image de 0 par la fonction $f$ est .....
- $f(4) =$ .... , l'image de 4 par la fonction $f$ est .....

**Définition 2 :**

Pour une fonction $f$ définie sur un ensemble $\mathcal{D}$,on appelle antécédent du nombre $y$ par la fonction $f$, un nombre $x \in \mathcal{D}$ tel que :

$$f(x) = y$$

*Remarque :* Pour un élément $x$ de $\mathcal{D}$, l'image existe et est unique. En revanche, pour tout $y$ réel, il peut y avoir entre 0 et une infinité d'antécédents.

**Exemple 2 :**

Pour la fonction $f$ :

$$\begin{array}{rccl} f: & [-6,5] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & -0,5x+3 \end{array}$$

On cherche le ou les antécédents éventuels de 4 par la fonction $f$ : cela revient à résoudre, pour $x \in [-6,5]$ l'équation :

$$\begin{array}{rrcl} & f(x) & = & 4 \\ \Leftrightarrow & -0,5x+3 & = & 4 \\ \Leftrightarrow & ............ & = & ........ \\ \Leftrightarrow & ............ & = & ........ \\ \Leftrightarrow & ............ & = & ........ \end{array}$$

Exercice 1 :

1. Déterminer l'image de $0$ et $-0,5$ par la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - 3$ :
........................................................................................................
........................................................................................................

**Solution :**

- On cherche $f(0) = 4 \times 0 - 3 = -3$. Donc, l'image de $0$ par la fonction $f$ est donc $-3$.
- On cherche $f(-0,5) = 4 \times (-0,5) - 3 = -5$. Donc, l'image de $-0,5$ par la fonction $f$ est donc $-5$.

2. Calculer $g(-2)$ et $g(0)$ avec la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + 2$ :
........................................................................................................
........................................................................................................

**Solution :**

- $g(-2) = 2 \times (-2) + 2 = -4 + 2 = -2$
- $g(0) = 2 \times 0 + 2 = 2$

3. Déterminer l'image de 5 et – 0,5 par la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(y) = y^2$ :
........................................................................................................
........................................................................................................

**Solution :**

- On cherche $f(5) = 5^2 = 25$. Donc, l'image de $5$ par la fonction $f$ est donc $25$.
- On cherche $f(-0,5) = (-5)^2 = 0,25$. Donc, l'image de $-0,5$ par la fonction $f$ est donc $0,25$.

4. Calculer $h(-4)$ et $h(1)$ avec la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(t) = \dfrac{1}{t}$ :
........................................................................................................
........................................................................................................

**Solution :**

- $h(-4) = \dfrac{1}{-4} = -\dfrac{1}{4}$
- $h(1) = \dfrac{1}{1} = 1$

5. Déterminer l'image de -1 et 2 par la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ :
........................................................................................................
........................................................................................................

**Solution :**

- On cherche $f(-1) = (-1)^3 = -1$. Donc, l'image de $-1$ par la fonction $f$ est donc $-1$.
- On cherche $f(2) = 2^3 = 8$. Donc, l'image de 2 par la fonction $f$ est donc 8.

Exercice 2 :

1. Calculer le ou les antécédents éventuels de 5 par la fonction définie sur $\mathbb{R}$ sur $f(x) = 4x-3$.
   ..............................................................................................
   ..............................................................................................

**Solution :**

Cela revient donc à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 5$ :

$$\begin{aligned} f(x) = 5 &\Leftrightarrow 4x - 3 = 5 \\ &\Leftrightarrow 4x = 8 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

Donc le seul antécédent de 5 par $f$ est 2.

2. On considère la fonction $f$ définie sur $[-3, 2]$ sur $f(x) = -2x + 3$.

- Déterminer le ou les antécédents éventuels de 5 :
  ..............................................................................................
  ..............................................................................................

**Solution :**

Cela revient donc à résoudre dans $[-3, 2]$ l'équation $f(x) = 5$ :

$$\begin{aligned} f(x) = 5 &\Leftrightarrow -2x + 3 = 5 \\ &\Leftrightarrow -2x = 2 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

On a bien $-1 \in [-3, 2]$, donc le seul antécédent de 5 par $f$ est $-1$.

- Déterminer le ou les antécédents éventuels de -5 :
  ..............................................................................................
  ..............................................................................................

**Solution :**

Cela revient donc à résoudre dans $[-3, 2]$ l'équation $f(x) = -5$ :

$$\begin{aligned} f(x) = -5 &\Leftrightarrow -2x + 3 = -5 \\ &\Leftrightarrow -2x = -8 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \end{aligned}$$

On a bien $4 \notin [-3, 2]$, donc $-5$ n'a pas d'antécédent par $f$.

- Déterminer le ou les antécédents éventuels de 0 :
  ..............................................................................................
  ..............................................................................................

**Solution :**

Cela revient donc à résoudre dans $[-3,2]$ l'équation $f(x)=0$ :

$$\begin{aligned} f(x)=0 &\Leftrightarrow -2x+3=0 \\ &\Leftrightarrow -2x=-3 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

On a bien $\frac{3}{2}\in[-3,2]$, donc le seul antécédent de 0 par $f$ est $\frac{3}{2}$.

3. On considère la fonction $f$ définie sur $[-3;2[\cup]2;5[$ sur $f(x)=\dfrac{-2x+3}{3x-6}$.

- Déterminer le ou les antécédents éventuels de 5 :

........................................................................................................
........................................................................................................

**Solution :**

Cela revient donc à résoudre dans $[-3;2[\cup]2;5[$ l'équation $f(x)=5$ :

$$\begin{aligned} f(x)=5 &\Leftrightarrow \frac{-2x+3}{3x-6}=5 \\ &\Leftrightarrow -2x+3=5(3x-6) \\ &\Leftrightarrow -2x+3=15x-30 \\ &\Leftrightarrow -17x=-33 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{33}{17} \end{aligned}$$

On a bien $\frac{33}{17}\in[-3;2[\cup]2;5[$, donc le seul antécédent de 5 par $f$ est $\frac{33}{17}$.

- Déterminer le ou les antécédents éventuels de -5 :

........................................................................................................
........................................................................................................

**Solution :**

Cela revient donc à résoudre dans $[-3;2[\cup]2;5[$ l'équation $f(x)=-5$ :

$$\begin{aligned} f(x)=-5 &\Leftrightarrow \frac{-2x+3}{3x-6}=-5 \\ &\Leftrightarrow -2x+3=-5(3x-6) \\ &\Leftrightarrow -2x+3=-15x+30 \\ &\Leftrightarrow 13x=27 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{27}{13} \end{aligned}$$

On a bien $\frac{27}{13}\in[-3;2[\cup]2;5[$, donc le seul antécédent de $-5$ par $f$ est $\frac{27}{13}$.

- Déterminer le ou les antécédents éventuels de 0 :

........................................................................................................
........................................................................................................

**Solution :**

Cela revient donc à résoudre dans $[-3;2[\cup]2;5[$ l'équation $f(x)=0$ :

$$\begin{aligned} f(x)=0 &\Leftrightarrow \frac{-2x+3}{3x-6}=0 \\ &\Leftrightarrow -2x+3=0 \\ &\Leftrightarrow -2x=-3 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

On a bien $\frac{3}{2}\in[-3;2[\cup]2;5[$, donc le seul antécédent de 0 par $f$ est $\frac{3}{2}$.

**Définition 3 :**

On appelle tableau de valeurs d'une fonction $f$ définie sur $\mathcal{D}$, un tableau présentant pour chaque valeur de la variable $x$ de $\mathcal{D}$, son image.

**Exemple 3 :**

Dans le tableau de valeurs de la fonction $f$ ci-dessous :

| $x$ | $-6,4$ | $-3,6$ | $-2$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $2$ | $4$ | $2$ | $4,5$ | $4$ | $3,25$ | $3,5$ | $2,04$ |

L'image de $-2$ par la fonction $f$ vaut ...........

........... est un antécédent de 3,5

Quels sont les antécédents de 2 d'après le tableau ? ...........

**Définition 4 :**

**Un graphique :** On considère une fonction $f$ définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.
On appelle représentation graphique (ou courbe représentative) de la fonction $f$ l'ensemble $\mathscr{C}_f$ des points de coordonnées $(x, f(x))$, où $x$ décrit l'ensemble $\mathcal{D}$.

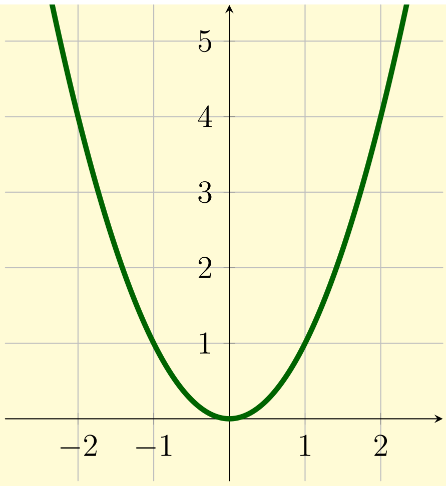
**Exemple 4 :**

On considère la $f$ définie par :

$$f:\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

On peut construire sa courbe représentative en s'aidant d'un tableau de valeurs :

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $4$ | $1$ | $0$ | $1$ | $4$ |


5
4
3
2
1
−2
−1
1
2

Exercice 3 : Voici un tableau de valeurs d'une fonction $f$ :

| $x$ | $-5$ | $-4,5$ | $-2,25$ | $-1$ | $0$ | $2,48$ | $4,7$ | $5$ | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $12$ | $-4$ | $0$ | $-2$ | $-4$ | $12$ | $-4$ | $2,66$ | $20$ |

1. Que vaut $f(-1)$ ? et $f(0)$ ?

**Solution :**

Par lecture du tableau, on a : $f(-1) = -2$ ? et $f(0) = -4$

2. Donner l'image de 0 par la fonction $f$ :

**Solution :**

Par lecture du tableau, on a $f(0) = -4$, donc l'image de 0 par la fonction $f$ est -4.

3. Donner des antécédents de 12 par la fonction $f$. Est-ce que ce sont les seuls ?

**Solution :**

D'après le tableau, on a deux valeurs possibles : $-5$ et $2,48$. Mais rien ne peux affirmer qu'il n'y a pas d'autres antécédents...( en effet, si la fonction est continue, entre 5 et 10, elle passe de $2,66$ à 20, donc elle passe au moins au fois de plus par 12...)

4. Donner des antécédents de 4 par la fonction $f$. Est-ce que ce sont les seuls ?

**Solution :**

D'après le tableau, 4 ne semble ne pas avoir d'antécédent par $f$, mais si la fonction est continue, elle prend plusieurs fois la valeur 4... ( par exemple, entre les valeurs $-5$ et $-4,5$, elle passe de 12 à $-4$, donc elle passe bien ( au moins une fois ) par 4 ! !) mais on ne peut donner la valeur des antécédents...

Exercice 4 : Voici un tableau de valeurs d'une fonction $g$ :

| $y$ | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(y)$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 |

1. Que vaut l'image de 2 par la fonction $g$ ? et l'image de 4 ?

**Solution :**

D'après le tableau, $g(2) = 10$, et $g(4) = 20$. L'image de 2 par la fonction $g$ est donc 10 et l'image de 4 est 20.

2. Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ? Si oui, avec quel coefficient de proportionnalité ?

**Solution :**

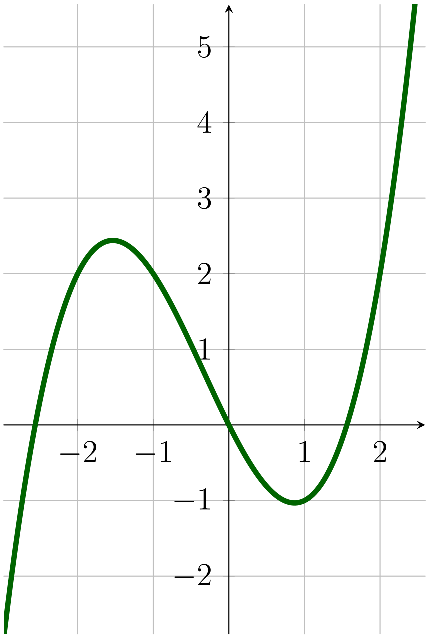
Oui, le coefficient de proportionnalité est 5.

3. Peux-t-on en déduire que $g(y) = 5y$ ?

**Solution :**

Rien de dit que cette proportionnalité est conservée pour tout réel, donc on ne peut affirmé que la fonction vérifie cette relation.

Exercice 5 : Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont voici la représentation graphique :




1. Que vaut $f(2)$ ?
   ..........................................................................................................

**Solution :**
On lit sur la courbe $f(2) = 2$

2. Que vaut f(0) ?
   ..........................................................................................................

**Solution :**
On lit sur la courbe $f(0) = 0$

3. Quelle est l'image de $-1$ par la fonction $f$ ?
   ..........................................................................................................

**Solution :**
On lit sur la courbe $f(-1) = 2$. Donc l'image de $-1$ par la fonction $f$ est 2.

4. Donne le ou les antécédents de -3 par la fonction $f$.
   ..........................................................................................................

**Solution :**
La courbe donnée ne permet pas de donner les antécédents de $-3$.

5. Donne le ou les antécédents de 2 par la fonction $f$.
   .......................................................................................................

**Solution :**
D'après la courbe, les antécédents de 2 par la fonction $f$ sont $-2$, $-1$ et 2. Mais encore une fois, rien ne dit qu'il n'y en pas d'autre...

6. Donne le ou les antécédents de 0 par la fonction $f$.

**Solution :**
D'après la courbe, les antécédents de 0 par la fonction $f$ sont approximativement $-2,6$, 0 et $1,6$. Mais encore une fois, rien ne dit qu'il n'y en pas d'autre...

Exercice 6 : Soit $f$ une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & -2t+1 \end{array}$$

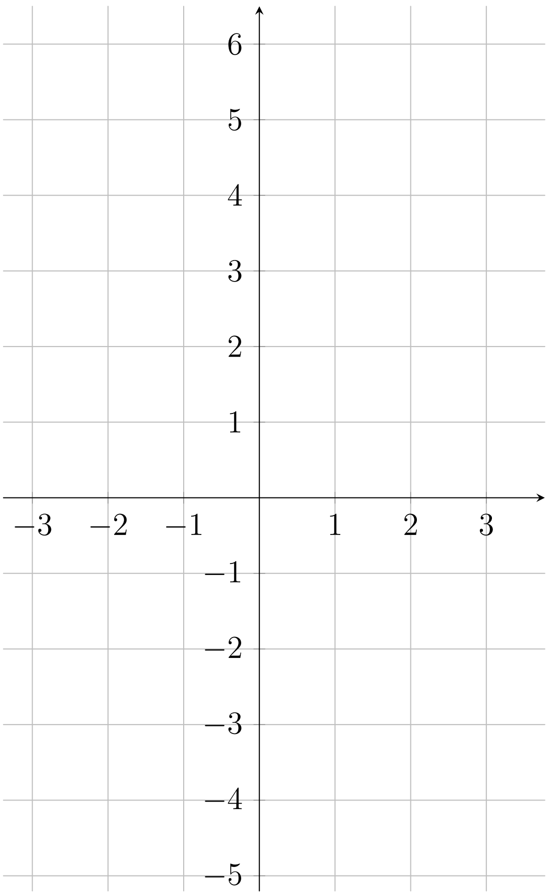
1. Compléter le tableau de valeurs suivant.

| $t$ | $-1$ | $-0,5$ | $0$ | $0,5$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ | | | | | |

**Solution :**

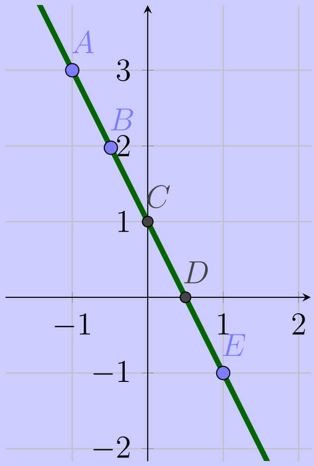
| $t$ | $-1$ | $-0,5$ | $0$ | $0,5$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ | 3 | 2 | 1 | 0 | -1 |

2. A l'aide de la question 1), place des points de coordonnées $(t; f(t))$ dans un repère :




3. Sachant que la représentation graphique d'une fonction affine est une droite, trace la courbe représentative de la fonction $f$.

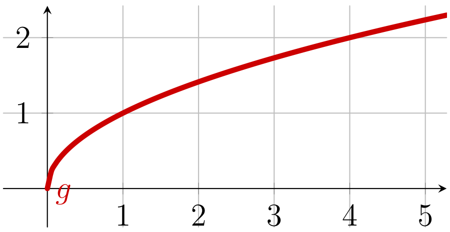
**Solution :**



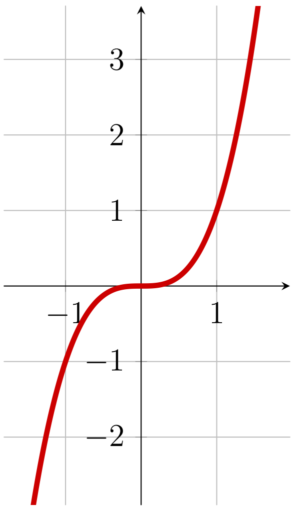
<u>Exercice 7 :</u> On donne quatre fonctions usuelles par leur expression :

1. $f_1(x) = x^2$
2. $f_2(x) = x^3$
3. $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$
4. $f_4(x) = \sqrt{x}$

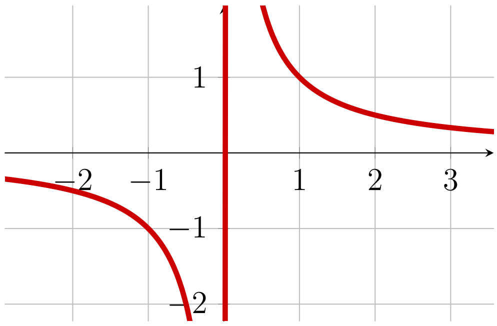
Associer à chaque fonction sa courbe représentative :



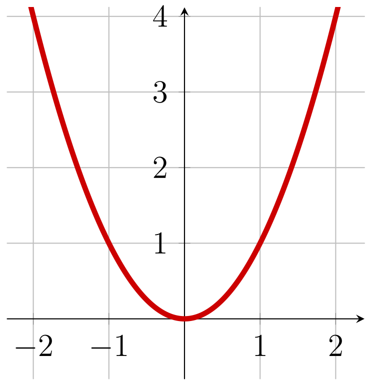

(A)




(B)




(C)




(D)

**Solution :**

Les courbes représentatives des fonctions usuelles sont des atouts pour visualisé le comportement des fonctions. Il faut donc bien les connaitre...

- (A) et (D) se ressemblent ( à l'orientation près...). (D) est la parabole, donc la courbe de la fonction carré, c'est à dire $f_1$. La courbe (D) est sa réciproque : c'est la fonction racine carrée, soit la fonction $f_4$.
- La courbe (B) est celle de la fonction cube : $f_2$.
- La dernière ( la courbe (C) ), est l'hyperbole, la courbe de la fonction inverse, soit la fonction $f_3$.