Fiche 3

Inéquations

Définition 1 :

Résoudre une inéquation c'est donner l'ensemble des solutions satisfaisant l'inéquation.

- Pour les inéquations du premier degré, on "isole" l'inconnue.
- Pour les inéquations d'ordre supérieur, on se ramène à une inéquation produit (grâce à la factorisation), et on fait un tableau de signes.
  Pour a non nul, le signe de la forme affine $ax+b$ est donné par :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		"signe de -a"	0	"signe de a"	

Exemple 1 :

$$\begin{array}{rrcl} & 3x-6 & > & 8x+4 \\ \Leftrightarrow & 3x-8x & > & 4+6 \\ \Leftrightarrow & -5x & > & 10 \\ \Leftrightarrow & x & < & \dfrac{10}{-5} \\ \Leftrightarrow & x & < & -2 \end{array}$$

L'ensemble solution est donc : $S =]-\infty;-2[$.

Exemple 2 :

Pour résoudre l'inéquation : $(3x-6)(8x+4) \geq 0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$3x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$8x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3x-6)(8x+4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble solution est donc : $S = \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right] \cup [2;+\infty[$.

Exercice 1 : Résoudre les inéquations suivantes :

a) $3x - 2 > 0$

....

....

....

Solution :

$$\begin{aligned} & 3x - 2 > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 3x > 2 \\ \Leftrightarrow \quad & x > \frac{2}{3} \end{aligned}$$

On a donc $S = \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$.

b) $2x + 7 \leq 0$

....

....

....

Solution :

$$\begin{aligned} & 2x + 7 \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x \leq -7 \\ \Leftrightarrow \quad & x \leq -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

On a donc $S = \left]-\infty - \frac{7}{2}\right]$.

c) $5x - 6 < 2x + 3$

....

....

....

Solution :

$$\begin{aligned} & 5x - 6 < 2x + 3 \\ \Leftrightarrow \quad & 3x < 9 \\ \Leftrightarrow \quad & x < 3 \end{aligned}$$

On a donc $S =]-\infty; 3[$.

d) $8 - 2x > 7 - 2x$

....

....

....

Solution :

$$\begin{aligned} & 8 - 2x > 7 - 2x \\ \Leftrightarrow \quad & 2x - 2x > 7 - 8 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 > -1 \end{aligned}$$

On obtient par équivalence une équation qui est toujours vraie, donc $S = \mathbb{R}$.

e) $6(2x + 1) \leq 3(3x + 2)$

....

....

....

Solution :

$$\begin{aligned} & 6(2x + 1) \leq 3(3x + 2) \\ \Leftrightarrow \quad & 12x + 6 \leq 9x + 6 \\ \Leftrightarrow \quad & 3x \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x \leq 0 \end{aligned}$$

On a donc $S =]-\infty; 0]$.

f) $7(x + 3) \geq 2(3 - 5x)$

....

....

....

Solution :

$$\begin{aligned} & 7(x + 3) \geq 2(3 - 5x) \\ \Leftrightarrow \quad & 7x + 21 \geq 6 - 10x \\ \Leftrightarrow \quad & 17x \geq -15 \\ \Leftrightarrow \quad & x \geq -\frac{15}{17} \end{aligned}$$

On a donc $S = \left[-\frac{15}{17}; +\infty\right[$.

Exercice 2 : Résoudre les inéquations suivantes :

a) $(2x + 1)(x + 3) > 0$

Solution :

Les annulateurs sont :

- $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$
- $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

x	$-\infty$		-3		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$2x + 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x + 1)(x + 3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient donc $S =]-\infty; -3[\cup \left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.

b) $(3x - 5)(1 - x) \geq 0$

Solution :

Les annulateurs sont :

- $3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}$
- $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$		1		$\dfrac{5}{3}$		$+\infty$
$3x - 5$		$-$		$-$	0	$+$	
$1 - x$		$+$	0	$-$		$-$	
$(3x - 5)(1 - x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On obtient donc $S = \left[1; \dfrac{5}{3}\right]$.

c) $3x(2x - 7) \leq 0$

Solution :

Les annulateurs sont :

- $3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

- $2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{2}$

x	$-\infty$		0		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x(2x-7)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient donc $S = \left[0; \dfrac{7}{2}\right]$.

d) $(-3x+5)(1-4x) < 0$

Solution :

Les annulateurs sont :

- $-3x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}$
- $1 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$-3x+5$		$+$		$+$	0	$-$	
$1-4x$		$+$	0	$-$		$-$	
$(-3x+5)(1-4x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient donc $S = \left]\dfrac{1}{4}; \dfrac{5}{3}\right[$.

Exercice 3 : Résoudre les inéquations suivantes :

a) $6x^2 - 5x > 0$

Solution :

Dans chaque cas, nous allons, grâce à la factorisation, aboutir à une inéquation produit :
$6x^2 - 5x > 0 \Leftrightarrow x(6x-5) > 0$
Les annulateurs sont :

- $x = 0$

- $6x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{6}$

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$6x - 5x$		$-$		$-$	0	$-$	
$6x^2 - 5x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient donc $S = \left]-\infty; 0\right[\cup \left]; \dfrac{5}{6}; +\infty\right[$.

b) $5x(2x-1) + 3(2x-1) \leq 0$

Solution :

$5x(2x-1) + 3(2x-1) \leq 0 \Leftrightarrow (2x-1)(5x+3) \leq 0$
Les annulateurs sont :

- $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$
- $5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{5}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$5x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	
$5x(2x-1) + 3(2x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient donc $S = \left[-\dfrac{3}{5}; \dfrac{1}{2}\right]$.

c) $(x-4)^2 - 25 > 0$

Solution :

$(x-4)^2 - 25 > 0 \Leftrightarrow (x-4-5)(x-4+5) > 0 \Leftrightarrow (x-9)(x+1) > 0$
Les annulateurs sont :

- $x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 9$
- $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

x	$-\infty$		-1		9		$+\infty$
$x-9$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-4)^2-25$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient donc $S =]-\infty; -1[\cup]9; +\infty[$.

d) $(4x+1)^2 \leq (x+5)^2$

Solution :

$$\begin{array}{rc}
 & (4x+1)^2 \leq (x+5)^2 \\
\Leftrightarrow & (4x+1)^2-(x+5)^2 \leq 0 \\
\Leftrightarrow & ((4x+1)-(x+5))((4x+1)+(x+5)) \leq 0 \\
\Leftrightarrow & (4x+1-x-5)(4x+1+x+5) \leq 0 \\
\Leftrightarrow & (3x-4)(5x+6) \leq 0
\end{array}$$

Les annulateurs sont :

- $3x-4=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3}$
- $5x+6=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{6}{5}$

x	$-\infty$		$-\frac{6}{5}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$5x+6$		$-$	0	$+$		$+$	
$(4x+1)^2-(x+5)^2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient donc $S = \left[-\dfrac{6}{5}; \dfrac{4}{3}\right]$.

Exercice 4 : Résoudre les équations suivantes :

a) $\dfrac{(6x+9)(1-x)}{2x-7} < 0$

Solution :

Les annulateurs sont :

- $6x+9=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2}$

- $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$

Les valeurs interdites sont :

- $2x-7=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{7}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$6x+9$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x-7$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{(6x+9)(1-x)}{2x-7}$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

On obtient donc $S=\left]-\dfrac{3}{2};1\right[\cup\left]\dfrac{7}{2};+\infty\right[$.

b) $\dfrac{5x-2}{(x+7)^2}\leq 0$

Solution :

Les annulateurs sont :

- $5x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{5}$

Les valeurs interdites sont :

- $x+7=0 \Leftrightarrow x=-7$

Sachant que l'on a un carré au dénominateur, l'expression est toujours positive :

x	$-\infty$		-7		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$5x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+7)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{5x-2}{(x+7)^2}$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On obtient donc $S=]-\infty;-7[\cup\left]-7;\dfrac{2}{5}\right]$.

c) $\dfrac{9}{(3x-7)(2-4x)}>0$

Solution :

Les valeurs interdites sont :

- $3x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{3}$.
- $2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
9		$+$		$+$		$+$	
$3x - 7$		$-$		$-$	0	$+$	
$2 - 4x$		$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{9}{(3x-7)(2-4x)}$		$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	

On obtient donc $S = \left]\dfrac{1}{2}; \dfrac{7}{3}\right[$.

d) $\dfrac{x^4 - 256}{x - 3} \leq 0$

Solution :

Il faut tout d'abord factoriser !!!

$$\begin{aligned} & \frac{x^4 - 256}{x - 3} \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{(x^2 - 16)(x^2 + 16)}{x - 3} \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{(x - 4)(x + 4)(x^2 + 16)}{x - 3} \leq 0 \end{aligned}$$

On constate que l'expression $x^2 + 16$ est toujours strictement positive (sachant qu'un réel au carré est positif...)

Les annulateurs sont :

- $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$
- $x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$

Les valeurs interdites sont :

- $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

x	$-\infty$		-4		3		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2+16		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x^4-256}{x-3}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

On obtient donc $S =]-\infty; -4] \cup]3; 4]$.