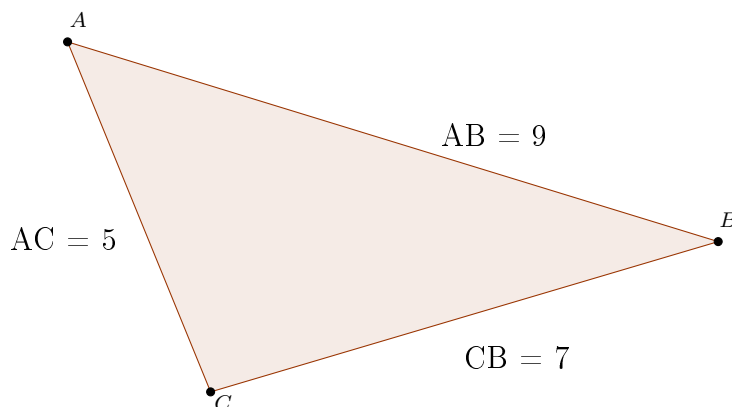


Fiche 8-B

Exercices sur le produit scalaire.

Exercice 1 : On considère le triangle ABC donc on donne les dimensions :



Déterminer les valeurs des produits scalaires suivants :

(a) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$

Solution :

On a $\overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}^2$.

Ce qui donne, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{CB}^2)$.

Donc on a : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2} (9^2 - 5^2 - 7^2) = 3,5$

(b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

Solution :

En suivant le même raisonnement, on a :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2)$.

Soit $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} (5^2 - 9^2 - 7^2) = -52,5$

(c) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$

Solution :

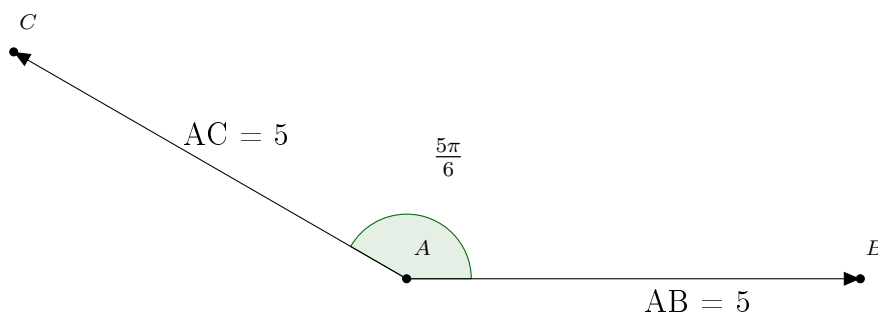
En suivant le même raisonnement, on a :

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{CA}^2 - \overrightarrow{AB}^2)$.

Soit $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} (7^2 - 5^2 - 9^2) = -28,5$

Exercice 2 :

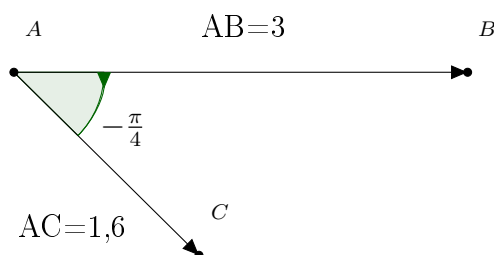
1. Déterminer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ dans le cas suivant :

**Solution :**

On dispose de la formule :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\| \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = 5 \times 5 \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 25 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{25}{2}\sqrt{3}$$

2. Déterminer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ dans le cas suivant :

**Solution :**

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\| \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = 3 \times 1,6 \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 4,8 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2,4\sqrt{2}$$

Exercice 3 :

On considère le losange $ABCD$ de centre O , tel que $AC = AB = 4$.

Déterminer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Solution :

Par projection : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AO \times AC = 4 \times 2 = 8$

2. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OB}$

Solution :

Les vecteurs étant orthogonaux, on a donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$

3. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$

Solution :

Les vecteurs sont colinéaires, dans le sens opposés, on a donc : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = -OA \times OC = -2 \times 2 = -4$.

4. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB}$

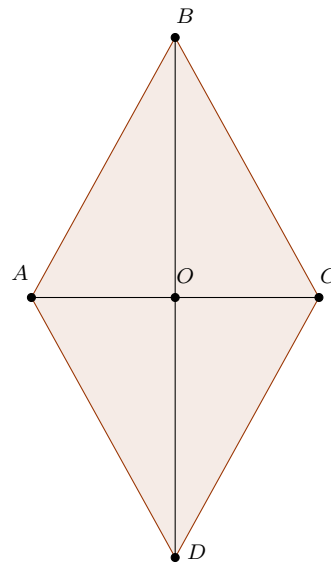
Solution :

Les vecteurs sont opposés, on a : $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}^2 = -AB^2 = -16$

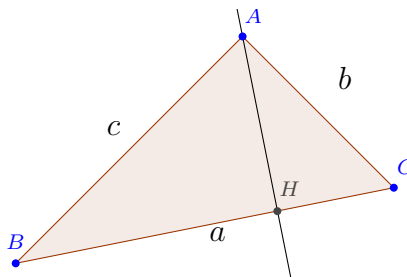
5. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO}$

Solution :

Les vecteurs sont colinéaires et dans le même sens : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} = AC \times AO = 4 \times 2 = 8$



Exercice 4 : On considère un triangle ABC , dont les mesures sont a, b, c comme l'indique la figure suivante :



On note H le pied de la hauteur issue de A , et $\mathcal{S}$ l'aire du triangle ABC .

1. Montrer que l'on a $\mathcal{S} = \frac{1}{2}ac|\sin(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})| = \frac{1}{2}ab|\sin(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})|$.

Solution :

La surface d'un triangle est donnée par la formule :

$$\mathcal{S} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{BC \times AH}{2} = a \times c \times |\sin(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})|, \text{ car, dans le triangle rectangle } ABH, \text{ l'hypoténuse est } AB, \text{ on a donc } AH = AB|\sin(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})|.$$

On peut aussi se placer dans le triangle ACH , on a alors $AH = AC|\sin(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})|$,
 donc $\mathcal{S} = \frac{1}{2}ab|\sin(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})|$

2. En déduire la formule des sinus dans le triangle ABC :

$$\frac{a}{|\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|} = \frac{b}{|\sin(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})|} = \frac{c}{|\sin(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})|}$$



Solution :

On peut faire de même avec la hauteur issue de C , on trouvera une autre formule pour le calcul de l'aire.

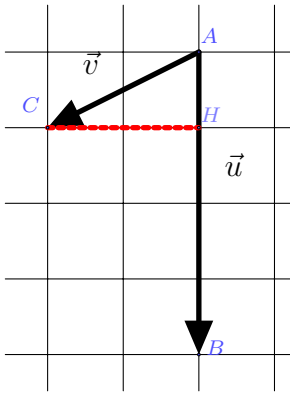
On a donc :

$\mathcal{S} = \frac{1}{2}ac|\sin(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})| = \frac{1}{2}ab|\sin(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})| = \frac{1}{2}bc|\sin(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})|$ On multiplie par 2 (pour se débarrasser des fractions), on inverse le tout... et on multiplie pas abc et ça marche!!!!

Exercice 5 : Déterminer dans les différents cas le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (l'unité étant le carreau) :

Solution :

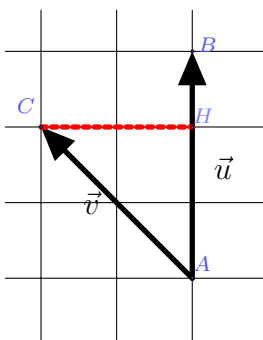
| On se sert de la définition par projection :



(a)

Solution :

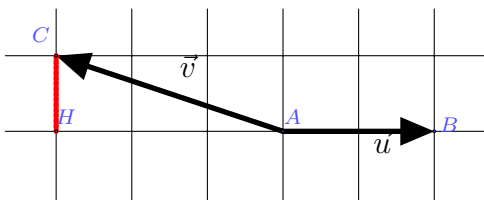
| On a donc : $\vec{u} \cdot \vec{v} = AH \times AB = 1 \times 4 = 4$



(b)

Solution :

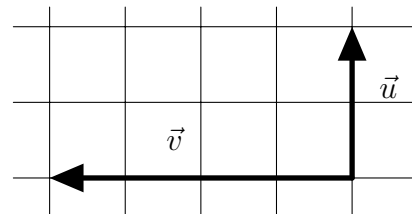
| On a donc : $\vec{u} \cdot \vec{v} = AH \times AB = 2 \times 3 = 6$



(c)

Solution :

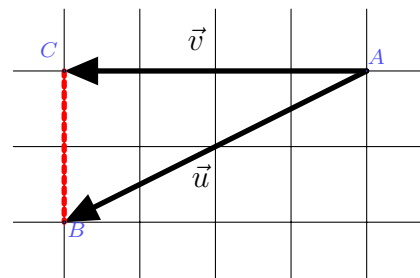
| On a donc : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -AH \times AB = -3 \times 2 = -6$. Le signe négatif apparaît du fait que les vecteur $\vec{AH}$ et $\vec{AB}$ sont de sens opposés.



(d)

Solution :

| Les vecteurs étant orthogonaux, on a donc : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.



(e)

Solution :

| On a donc : $\vec{u} \cdot \vec{v} = AC \times AC = 4 \times 4 = 16$

Exercice 6 : On considère les points $A(-2, 1)$, $B(2, 2)$ et $C\left(-\frac{5}{2}, 3\right)$.

Déterminer la valeur des produits scalaires : $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ et $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$.

Quel est la nature du rectangle ABC ?

Solution :

On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2+2 \\ 2-1 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}+2 \\ 3-1 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \times 2 = -2 + 2 = 0$. Donc les vecteurs sont orthogonaux.
Le triangle est donc rectangle en A...

Pour le reste, on trouve $\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -4 \times \left(-\frac{9}{2}\right) + (-1) \times 1 = 17$.

$\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Soit $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{9}{2}\right) + (-2) \times (-1) = \frac{17}{4}$.

On constate que les deux produits scalaires $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ sont différents, donc le triangle n'est que rectangle, pas isocèle...

Exercice 7 : Dans chacun des cas suivants, le triangle ABC est-il rectangle :

- (a) $A(2, 3)$, $B(-2, 1)$, $C(4, -1)$.

Solution :

On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4 \times 2 + (-2) \times (-4) = 0$. Les vecteurs sont donc orthogonaux. Le triangle est donc rectangle en A.

- (b) $A(3, 3)$, $B(5, -3)$, $C(1, 1)$.

Solution :

On a $\overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 4 \times 2 + 2 \times (-4) = 0$. Les vecteurs sont donc orthogonaux. Le triangle est donc rectangle en C.

- (c) $A(4, -2)$, $B(1, 3)$, $C(1, -4)$.

Solution :

On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$.
Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 \times (-3) + 5 \times (-2) = -1$.
De même $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -3 \times 0 + 5 \times (-7) = -35$.

Et enfin $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = -3 \times 0 + (-2) \times (-7) = 14$.

Donc il n'y a pas de vecteurs orthogonaux, donc le triangle n'est pas rectangle.

Exercice 8 : Dans chacun des cas suivants, les droites (AB) et (AC) sont-elles perpendiculaires :

(a) $A(-2, -1)$, $B(1, 2)$, $C(-4, 1)$.

Solution :

On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times (-2) + 3 \times 2 = 0$.

Les droites (AB) et (AC) sont donc perpendiculaires.

(b) $A(4, 2)$, $B(-1, -1)$, $C(6, -1)$.

Solution :

On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-5) \times 2 + (-3) \times (-3) = -1$.

Les droites (AB) et (AC) ne sont pas donc perpendiculaires.

(c) $A(1, -3)$, $B(5, -2)$, $C(0, 1)$.

Solution :

On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times (-1) + 1 \times 4 = 0$.

Les droites (AB) et (AC) sont donc perpendiculaires.

Exercice 9 : On considère un nombre a réel.

Déterminer la valeur de a pour que les vecteurs soient orthogonaux :

(a) $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2a+1 \\ a+5 \end{pmatrix}$

Solution :

Pour que les vecteurs soient orthogonaux, il faut et il suffit que leur produit scalaire soit nul :

$$\begin{aligned} \vec{u} \perp \vec{v} &\Leftrightarrow a(2a+1) + (-2)(a+5) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2a^2 - a - 10 = 0 \end{aligned}$$

On retrouve un polynôme du second degré : $\Delta = 81$, il y a deux racines réelles :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1+9}{4} \\ a_2 = \frac{1-9}{4} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a_1 = \frac{5}{2} \\ a_2 = -2 \end{cases}$$

Il y a donc deux valeurs possibles : $\frac{5}{2}$ et -2 .

(b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 3a-2 \\ 2a-1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 10 \\ 4-6a \end{pmatrix}$

Solution :

Pour que les vecteurs soient orthogonaux, il faut et il suffit que leur produit scalaire soit nul :

$$\begin{aligned} \vec{u} \perp \vec{v} &\Leftrightarrow 10(3a-2) + (2a-1)(4-6a) = 0 \\ &\Leftrightarrow -12a^2 + 44a - 24 = 0 \end{aligned}$$

On retrouve un polynôme du second degré : $\Delta = 784$, il y a deux racines réelles :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{-44+28}{-24} \\ a_2 = \frac{-44-28}{-24} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a_1 = \frac{2}{3} \\ a_2 = 3 \end{cases}$$

Il y a donc deux valeurs possibles : $\frac{2}{3}$ et 3 .

Exercice 10 : On considère les points $A(-2, -3)$, $B(-1, 1)$, et $C(1, -8)$.

1. Déterminer les normes suivantes : $\|\vec{AB}\|$ et $\|\vec{AC}\|$.

Solution :

On a $\vec{AB} \begin{pmatrix} -1+2 \\ 1+3 \end{pmatrix}$ soit $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

On a $\vec{AC} \begin{pmatrix} 1+2 \\ -8+3 \end{pmatrix}$ soit $\vec{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$$

2. Déterminer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$



Solution :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 3 + 4 \times (-5) = -17$$

3. En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

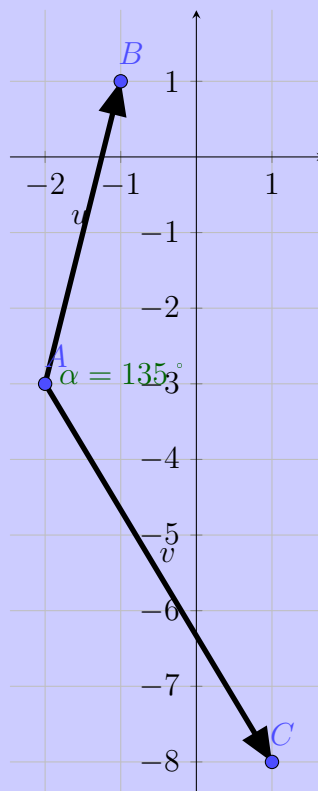


Solution :

On a la formule : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ce qui donne donc :

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{-17}{\sqrt{17} \times \sqrt{34}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ce qui donne $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm \frac{3\pi}{4}$. En s'aidant du dessin, on peut dire que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{3\pi}{4}$:



Exercice 11: On considère les points $A(9, 1)$, $B(-1, 2)$, et $C(5, -3)$.

1. Déterminer les normes suivantes : $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AC}\|$.

Solution :

$$\text{On a } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1-9 \\ 2-1 \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-10)^2 + 1^2} = \sqrt{101}$$

$$\text{On a } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5-9 \\ -3-1 \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$$

2. Déterminer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

Solution :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -10 \times (-4) + 1 \times (-4) = 36$$

3. En déduire, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée d'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Solution :

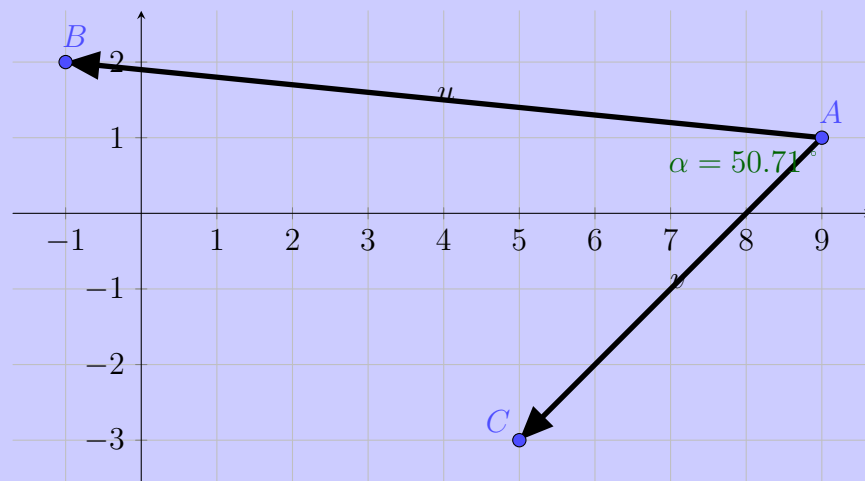
On a la formule : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ce qui donne donc :

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{36}{\sqrt{101} \times (4\sqrt{2})} = \frac{9\sqrt{202}}{202}.$$

Ce qui donne $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm \arccos\left(\frac{9\sqrt{202}}{202}\right)$. En s'aidant du dessin, on peut dire

$$\text{que } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arccos\left(\frac{9\sqrt{202}}{202}\right).$$

D'après la calculatrice $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \simeq 0.885 \text{ rad}$



Exercice 12: On considère les points $A(3, 1)$ et $B(0; 3)$.

1. Pour tout point $M(x, y)$ du plan, donner l'expression du produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ en fonction de x et y .
2. En déduire une équation du cercle de diamètre $[AB]$.
3. Déterminer les points d'intersection du cercle et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$.



Solution :

On a $d : y = x + 1$ et $\mathcal{C}([AB]) : x^2 + y^2 - 3x - 4y + 3 = 0$.

Donc

$$\begin{aligned}
 M(x, y) \in \mathcal{C}([AB]) \cap d &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 - 3x - 4y + 3 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + (x + 1)^2 - 3x - 4(x + 1) + 3 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ 2x^2 - 5x = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x(2x - 5) = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x = 0 \text{ ou } x = \frac{5}{2} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{5}{2} \text{ et } y = \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

Il y a donc deux points d'intersection : $M_1(0, 1)$ et $M_2\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

4. Déterminer les points d'intersection du cercle et de la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $y = -\frac{3}{2}x + 1$.
 . Que dire de $\mathcal{D}'$ pour le cercle ?



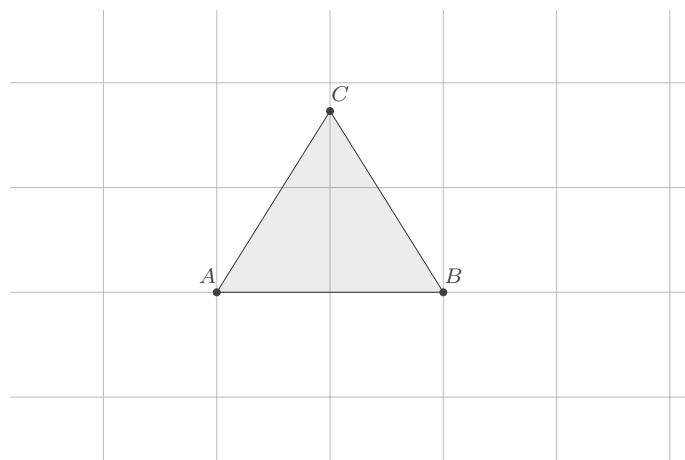
Solution :

On a $d' : y = -\frac{3}{2}x + 1$ et $\mathcal{C}([AB]) : x^2 + y^2 - 3x - 4y + 3 = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}
 M(x, y) \in \mathcal{C}([AB]) \cap d' &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + 1 \\ x^2 + y^2 - 3x - 4y + 3 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + 1 \\ x^2 + \left(-\frac{3}{2}x + 1\right)^2 - 3x - 4\left(-\frac{3}{2}x + 1\right) + 3 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + 1 \\ \frac{13}{4}x^2 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + 1 \\ x = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = +1 \\ x = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Il y a donc d points d'intersection : $M_1(0,1)$ donc d' est une tangente au cercle.

Exercice 13 : Soit ABC un triangle équilatéral de côté de longueur 2. On note G le point tel que $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{GB}$ et I le milieu de $[AB]$.



- Placer le point G en justifiant sa construction.

Solution :

$$\begin{aligned} \text{On a } \overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{GB} &\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow -2\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

- Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Solution :

On sait que dans un triangle équilatéral, les 3 angles sont égaux à $\frac{\pi}{3}$, donc on a :

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CA}\| \times \|\overrightarrow{CB}\| \times \cos\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$$

- Montrer que pour tout point M du plan, on a :

(a) $-\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MG}$.

Solution :

Pour tout point M du plan :

$$\begin{aligned} -\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} &= -\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{GB} \\ &= 2\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} \\ &= 2\overrightarrow{MG} \end{aligned}$$

(b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$

Solution :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\
&= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\
&= MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) + \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \\
&= MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \vec{0} - \frac{1}{4}AB^2 \\
&= MI^2 - \frac{AB^2}{4}
\end{aligned}$$

4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_1$ des points M du plan tels que : $\| -\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \| = 2$.

Solution :

$$\begin{aligned}
M(x, y) \in \mathcal{E}_1 &\Leftrightarrow \| -\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \| = 2 \\
&\Leftrightarrow \| 2\overrightarrow{MG} + \vec{0} \| = 2 \\
&\Leftrightarrow \| \overrightarrow{MG} \| = 1 \\
&\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}(G, 1)
\end{aligned}$$

On a donc $\mathcal{E}_1 = \mathcal{C}(G, 1)$

5. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_2$ des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2$.

Solution :

$$\begin{aligned}
M(x, y) \in \mathcal{E}_2 &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2 \\
&\Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 2 \\
&\Leftrightarrow MI^2 - 1 = 2 \\
&\Leftrightarrow MI^2 = 3 \\
&\Leftrightarrow MI = \sqrt{3} \\
&\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}(I, \sqrt{3})
\end{aligned}$$

Conclusion $\mathcal{E}_2 = \mathcal{C}(I, \sqrt{3})$

6. Montrer que B appartient à $\mathcal{E}_1$ et que C appartient à $\mathcal{E}_2$.

Solution :

$$\begin{aligned}
&\text{On a } \| -\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BB} \| = \| -\overrightarrow{BA} \| = 2, \text{ donc } B \in \mathcal{E}_1. \\
&\text{On a } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 2, \text{ donc } C \in \mathcal{E}_2.
\end{aligned}$$

7. Construire $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.

