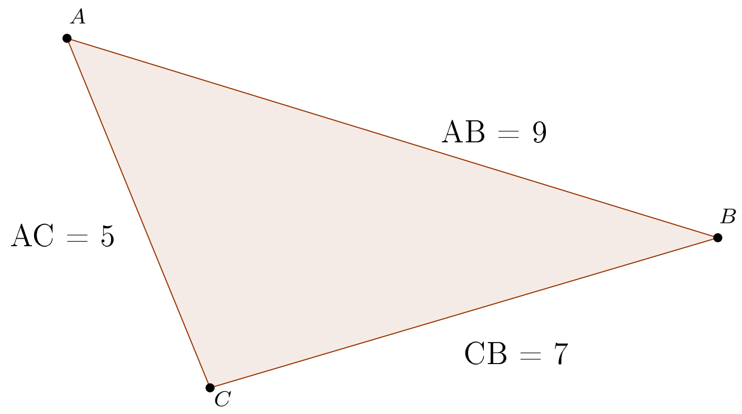
Fiche 7-B

Exercices sur le produit scalaire.

Exercice 1 : On considère le triangle ABC donc on donne les dimensions :

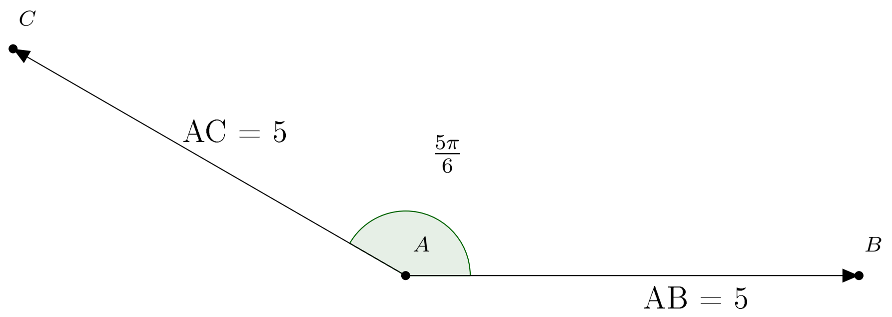


Déterminer les valeurs des produits scalaires suivants :

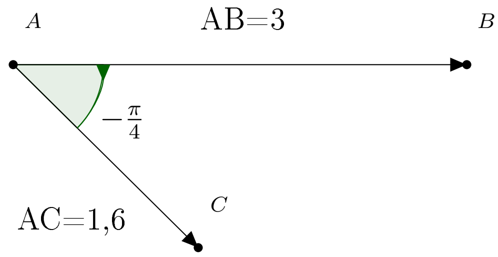
(a) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ | (b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ | (c) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$

Exercice 2 :

1. Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans le cas suivant :



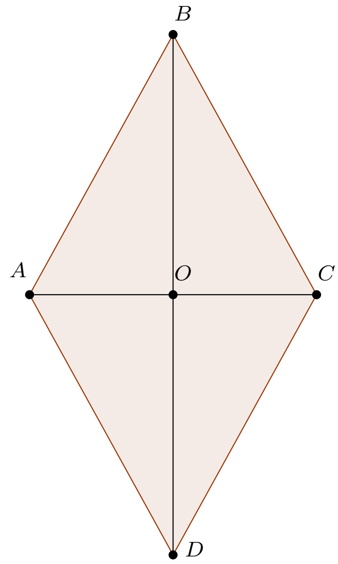
2. Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans le cas suivant :



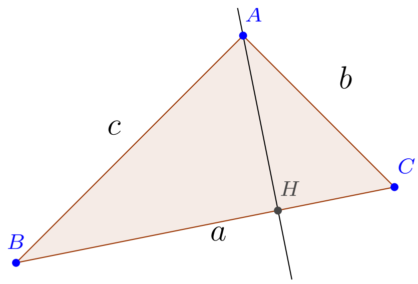
Exercice 3 :

On considère le losange $ABCD$ de centre O, tel que $AC = AB = 4$.
Déterminer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OB}$
3. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$
4. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB}$
5. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO}$



Exercice 4 : On considère un triangle ABC, dont les mesures sont a, b, c comme l'indique la figure suivante :

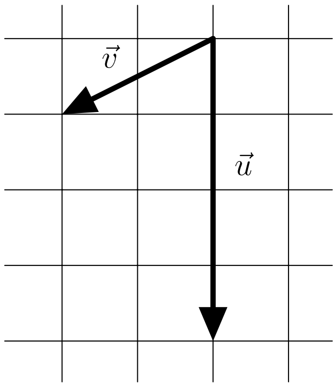


On note H le pied de la hauteur issue de A, et $\mathcal{S}$ l'aire du triangle ABC.

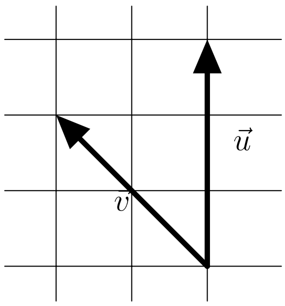
1. Montrer que l'on a $\mathcal{S} = \dfrac{1}{2}ac|\sin\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)| = \dfrac{1}{2}ab|\sin\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right)|$.
2. En déduire la formule des sinus dans le triangle ABC :

$$\frac{a}{|\sin\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)|} = \frac{b}{|\sin\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)|} = \frac{c}{|\sin\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right)|}$$

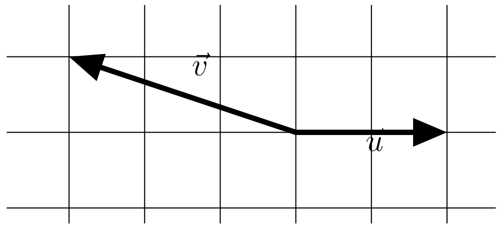
<u>Exercice 5 :</u> Déterminer dans les différents cas le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (l'unité étant le carreau) :



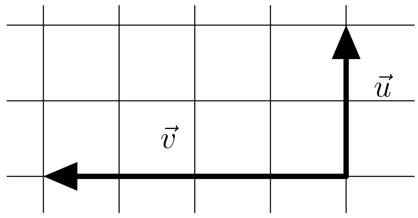
(a)



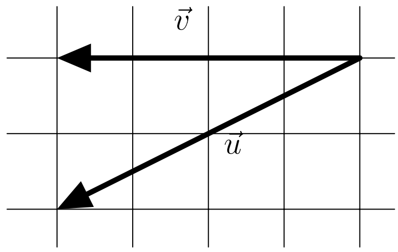
(b)



(c)



(d)



(e)

<u>Exercice 6 :</u> On considère les points $A(-2,1)$, $B(2,2)$ et $C\left(-\frac{5}{2},3\right)$.
Déterminer la valeur des produits scalaires : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.
Quel est la nature du rectangle ABC ?

<u>Exercice 7 :</u> Dans chacun des cas suivants, le triangle ABC est-il rectangle :

(a) $A(2,3)$, $B(-2,1)$, $C(4,-1)$.

(b) $A(3,3)$, $B(5,-3)$, $C(1,1)$.

(c) $A(4,-2)$, $B(1,3)$, $C(1,-4)$.

<u>Exercice 8 :</u> Dans chacun des cas suivants, les droites (AB) et (AC) sont-elles perpendiculaires :

(a) $A(-2,-1)$, $B(1,2)$, $C(-4,1)$.

(b) $A(4,2)$, $B(-1,-1)$, $C(6,-1)$.

(c) $A(1,-3)$, $B(5,-2)$, $C(0,1)$.

<u>Exercice 9 :</u> On considère un nombre a réel.
Déterminer la valeur de a pour que les vecteurs soient orthogonaux :

(a) $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2a+1 \\ a+5 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3a-2 \\ 2a-1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 10 \\ 4-6a \end{pmatrix}$

<u>Exercice 10 :</u> On considère les points $A(-2,-3)$, $B(-1,1)$, et $C(1,-8)$.

1. Déterminer les normes suivantes : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|$.
2. Déterminer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
3. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

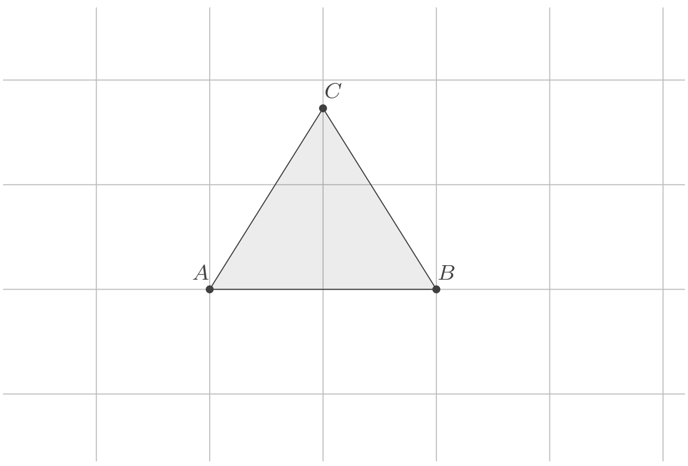
<u>Exercice 11 :</u> On considère les points $A(9,1)$, $B(-1,2)$, et $C(5,-3)$.

1. Déterminer les normes suivantes : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|$.
2. Déterminer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
3. En déduire, à l'aide de la calculatrice, un valeur approchée d'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

<u>Exercice 12 :</u> On considère les points $A(3,1)$ et $B(0;3)$.

1. Pour tout point $M(x,y)$ du plan, donner l'expression du produit scalaire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ en fonction de x et y.
2. En déduire une équation du cercle de diamètre $[AB]$.
3. Déterminer les points d'intersection du cercle et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x+1$.
4. Déterminer les points d'intersection du cercle et de la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $y = -\dfrac{3}{2}x+1$. . Que dire de $\mathcal{D}'$ pour le cercle ?

<u>Exercice 13 :</u> Soit ABC un triangle équilatéral de côté de longueur 2.
On note G le point tel que $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{GB}$ et I le milieu de $[AB]$.



1. Placer le point G en justifiant sa construction.

2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.
3. Montrer que pour tout point M du plan, on a :
   (a) $-\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MG}$.
   (b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$
4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_1$ des points M du plan tels que : $\| -\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = 2$.
5. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_2$ des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2$.
6. Montrer que B appartient à $\mathcal{E}_1$ et que C appartient à $\mathcal{E}_2$.
7. Construire $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.