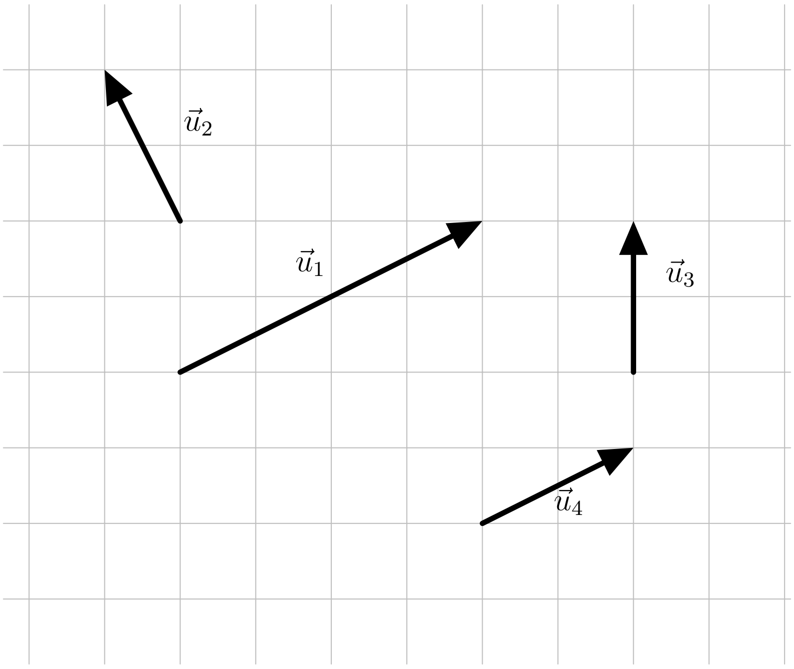
Fiche 7-A

Exercices sur les vecteurs.

Exercice 1 : On considère 4 vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ et $\vec{u}_4$.



Tracer les vecteurs suivants :

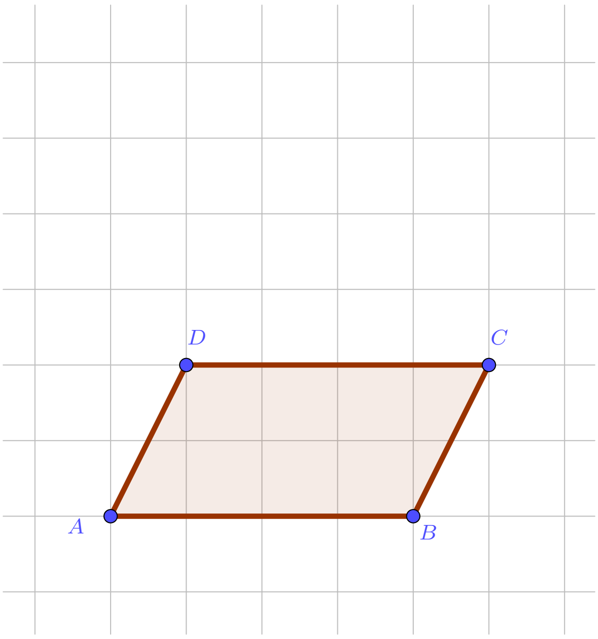
(a) $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$

(b) $\vec{v}_2 = 3\vec{u}_3 - 2\vec{u}_2$

(c) $\vec{v}_3 = \vec{u}_1 - 2\vec{u}_4$

(d) $\vec{v}_4 = \dfrac{1}{2}\vec{u}_1 - \dfrac{5}{2}\vec{u}_3 + 2\vec{u}_2$

Exercice 2 : Soit ABCD est un parallélogramme.



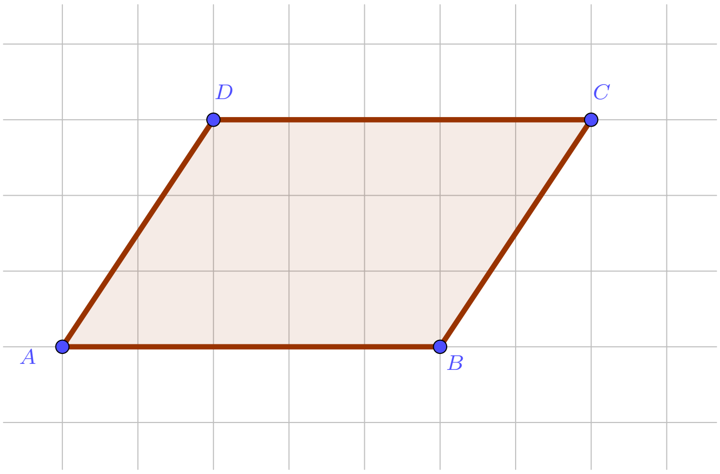
1. Construire les point M et N définis par :

$$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

2. Exprimer $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

3. Démontrer que C, M et N sont alignés.

Exercice 3 : Soit ABCD est un parallélogramme.



1. Construire les point I, J, K et L définis par :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{CK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CD}\ ;\ \overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$$

2. Montrer que l'on a :

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

3. Montrer que l'on a la même égalité avec le vecteur $\overrightarrow{LK}$.

4. En déduire la nature du quadrilatère $IJKL$.

Exercice 4 : On considère les points $A\,(4;3)$, $B\,(1;-3)$ et $C\left(-\frac{3}{2};2\right)$

1. Placer les points dans une figure.

2. Donner les valeurs exactes des distances AC et BC. En déduire la nature du triangle ABC.

3. Donner les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}$.

4. Donner les coordonnées du point I milieu de $[AB]$.

5. Montrer que I est le milieu de $[CD]$.

Exercice 5 : On considère les points $A\,(3;1)$, $B\,(1;2)$ et $C\,(-2;1)$

1. Placer les points dans une figure.

2. Représenter le vecteur $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

3. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AM}$.
4. En déduire les coordonnées du point M.

Exercice 6 : Soit ABC un triangle. On définit les points P, Q et R par :
$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} \quad , \quad \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{CR} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

1. Décomposition vectorielle :
   (a) Exprimer les $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (b) Montrer que les points P, Q et R sont alignés.
2. Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$:
   (a) Déterminer les coordonnées des six points.
   (b) Montrer que les points P, Q et R sont alignés.

Exercice 7 : On considère les points $A(-3; -1)$, $B(2; 1)$.

1. Calculer les coordonnées de I milieu de $[AB]$.
2. Soit $C\left(-5; -\frac{9}{5}\right)$. Montrer que les points A, B et C sont alignés.
3. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires et calculer le coefficient de colinéarité.

Exercice 8 : On considère un nombre réel α . Déterminer la valeur de α pour que les vecteurs soient colinéaires :

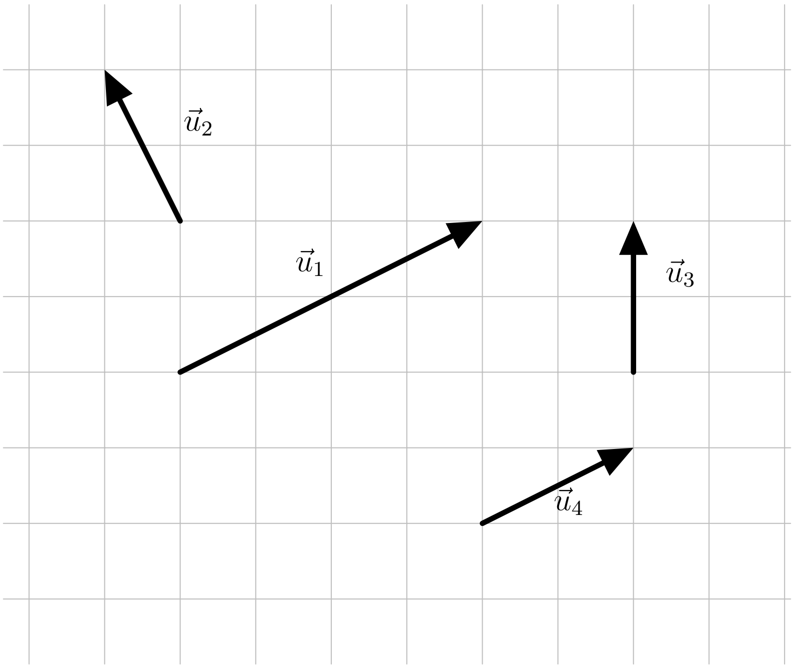
1. Pour $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha \\ -2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\alpha+1 \\ \alpha-7\end{pmatrix}$.
2. Pour $\vec{u}\begin{pmatrix}3\alpha \\ 2\alpha-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}12 \\ 3\alpha-7\end{pmatrix}$.

Fiche 7-A

Exercices sur les vecteurs.

correction

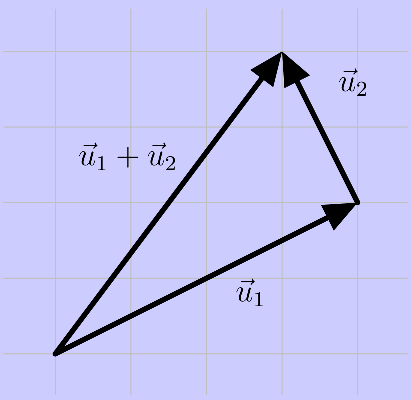
Exercice 1 : On considère 4 vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ et $\vec{u}_4$.



Tracer les vecteurs suivants :

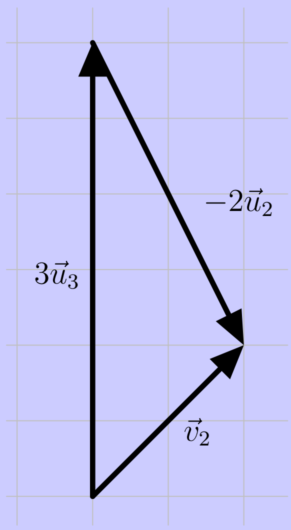
(a) $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$

Solution :



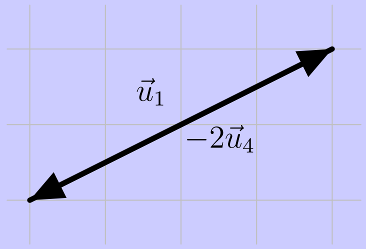
(b) $\vec{v}_2 = 3\vec{u}_3 - 2\vec{u}_2$

Solution :



(c) $\vec{v}_3 = \vec{u}_1 - 2\vec{u}_4$

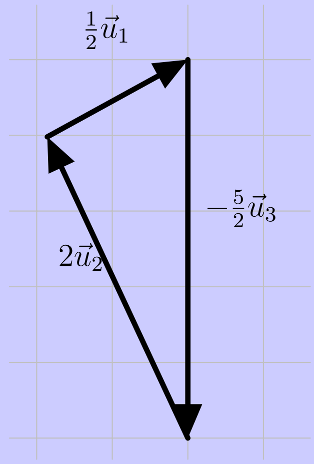
Solution :



Donc $\vec{v}_3 = \vec{0}$.

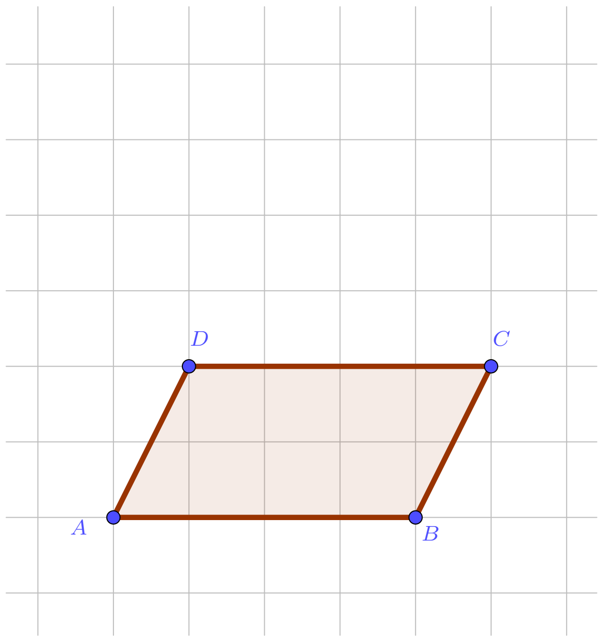
(d) $\vec{v}_4 = \dfrac{1}{2}\vec{u}_1 - \dfrac{5}{2}\vec{u}_3 + 2\vec{u}_2$

Solution :



Donc $\vec{v}_4 = \vec{0}$.

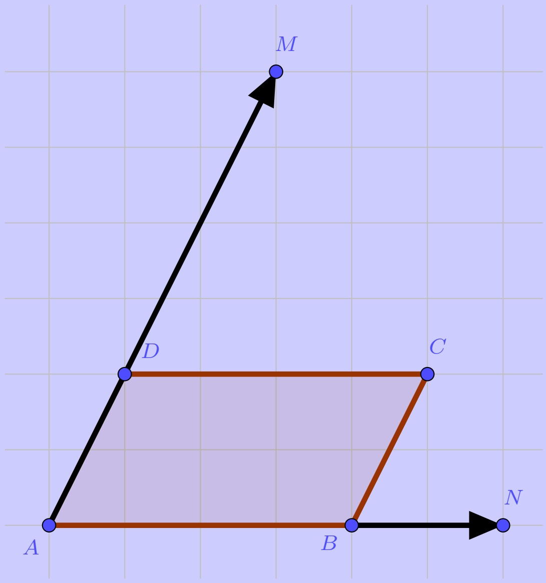
<u>Exercice 2 :</u> Soit ABCD est un parallélogramme.



1. Construire les point M et N définis par :

$$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Solution :



2. Exprimer $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Solution :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CM} &= \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\\
&= -\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}\\
&= -\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\\
\overrightarrow{CN} &= \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BN}\\
&= -\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}
\end{aligned}$$

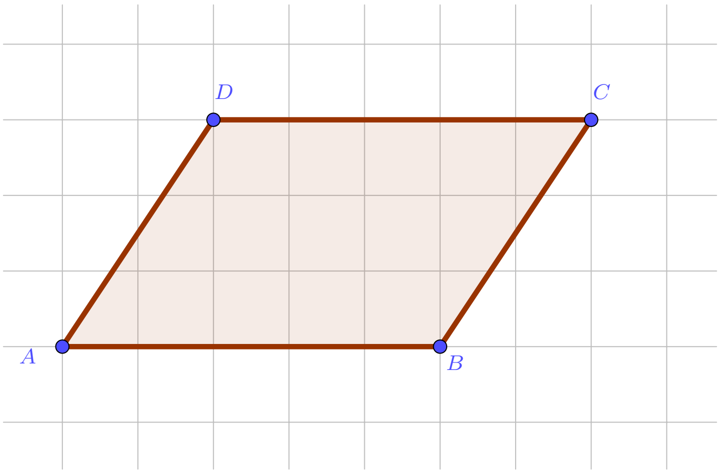
3. Démontrer que C, M et N sont alignés.

Solution :

On constate que $-2\overrightarrow{CN}=-2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CM}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{CN}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont colinéaires, donc les points C, M et N sont alignés.

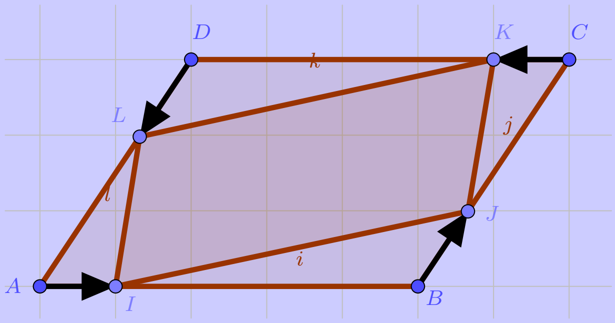
Exercice 3 : Soit ABCD est un parallélogramme.



1. Construire les point I, J, K et L définis par :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} \ ; \ \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \ \ ; \ \overrightarrow{CK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CD} \ ; \ \overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$$

Solution :



2. Montrer que l'on a :

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

Solution :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} \\
&= -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \\
&= \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}
\end{aligned}$$

3. Montrer que l'on a la même égalité avec le vecteur $\overrightarrow{LK}$.

Solution :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{LK} &= \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CK} \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} \\
&= \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}
\end{aligned}$$

4. En déduire la nature du quadrilatère $IJKL$.

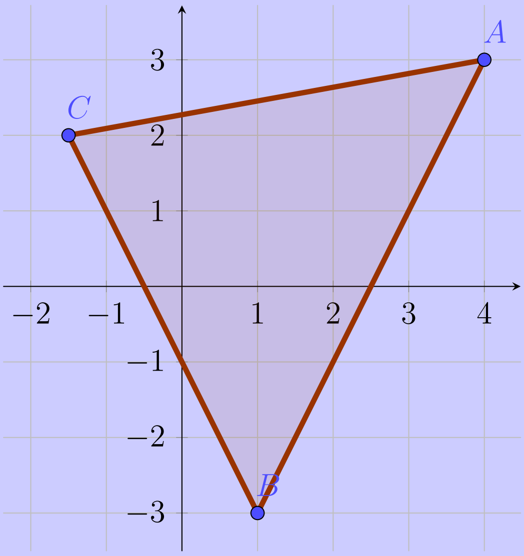
Solution :

On constate que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$, donc le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

Exercice 4 : On considère les points $A\,(4;3)$, $B\,(1;-3)$ et $C\left(-\frac{3}{2};2\right)$

1. Placer les points dans une figure.

Solution :



2. Donner les valeurs exactes des distances AC et BC. En déduire la nature du triangle ABC.

Solution :

On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}-4\\ 2-3\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-\frac{11}{2}\\ -1\end{pmatrix}$.

On a $AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{\left(-\frac{11}{2}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{5}$.

On a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}-1\\ 2+3\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\ 5\end{pmatrix}$.

On a $BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 5^2} = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{5}$.

On a donc $AC = BC$, donc les triangle en isocèle en C.

3. Donner les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}$.

Solution :

On cherche $D(x_D, y_D)$ tel que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}$, soit : $\begin{cases} x_D - x_B = x_A - x_C \\ y_D - y_B = y_A - y_C \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x_D - 1 = 4 + \dfrac{3}{2} \\ y_D + 3 = 3 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = \dfrac{13}{2} \\ y_D = -2 \end{cases}$.

On trouve donc $D\left(\dfrac{13}{2}, -2\right)$.

4. Donner les coordonnées du point I milieu de $[AB]$.

Solution :

Les coordonnées d'un milieu sont obtenues en faisant la moyenne des coordonnées : $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$, soit $I\left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$.

5. Montrer que I est le milieu de $[CD]$.

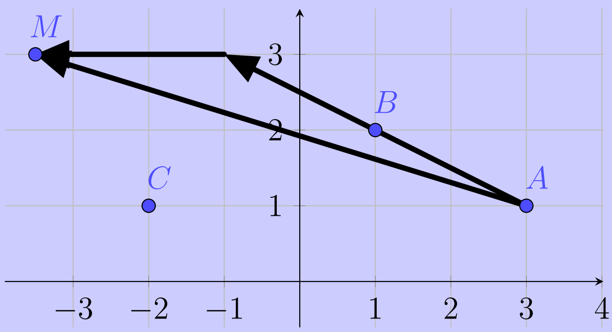
Solution :

Au choix, on peut calculer les coordonnées du milieu de $[CD]$, puis vérifier qu'elles sont égales, ou plutôt utiliser une propriété du parallélogramme : Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
L'égalité $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}$, fait en effet de $BDAC$ un parallélogramme...

Exercice 5 : On considère les points $A\,(3; 1)$, $B\,(1; 2)$ et $C\,(-2; 1)$

1. Placer les points dans une figure.

Solution :



2. Représenter le vecteur $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

3. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AM}$.

Solution :

On trouve $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}2x_{\overrightarrow{AB}}+\frac{1}{2}x_{\overrightarrow{AC}}\\2y_{\overrightarrow{AB}}+\frac{1}{2}y_{\overrightarrow{AC}}\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}-\frac{13}{2}\\2\end{pmatrix}$

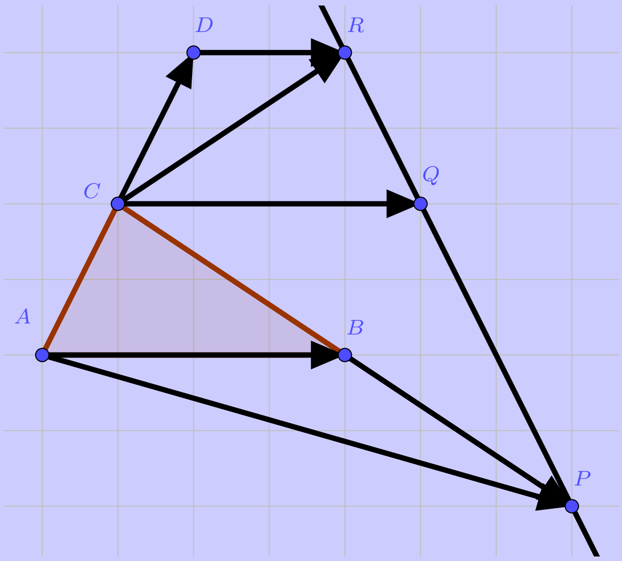
4. En déduire les coordonnées du point M.

Solution :

On connait les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AM}$, donc, $\begin{cases} x_M - x_A &= -\frac{13}{2} \\ y_M - y_A &= 2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_M &= -\frac{7}{2} \\ y_M &= 3 \end{cases}$ Donc $M\left(-\frac{7}{2},3\right)$.

Exercice 6 : Soit ABC un triangle. On définit les points P, Q et R par :
$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CR}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Solution :



1. Décomposition vectorielle :

(a) Exprimer les $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Solution :

On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CQ}\\ &= -\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\\ &= -\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\end{aligned}.$$

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{PR} & = & \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CR} \\ & = & -\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ & = & -2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ & = & -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC} \end{array}.$$

(b) Montrer que les points P, Q et R sont alignés.

Solution :

On constate que $\frac{3}{2}\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PR}$, donc les vecteurs sont colinéaires, donc les points sont alignés...

2. Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$:

(a) Déterminer les coordonnées des six points.

Solution :

En formant un repère d'origine A et de base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, on a :

- $A(0,0)$.
- $B(1,0)$
- $C(0,1)$
- Sachant que $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$, avec $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$,et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, on a donc $P(2,-1)$.
- On sait que $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{AB}$, avec $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, donc $Q(1,1)$.
- On sait que $\overrightarrow{CR}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, soit $\overrightarrow{CR}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$, donc $R\left(\frac{1}{2},2\right)$.

(b) Montrer que les points P, Q et R sont alignés.

Solution :

On connait les coordonnées des points P, Q et R, donc $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\3\end{pmatrix}$.

On a $\det\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right)=(-1)\times 3-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-3+3=0$. Donc les vecteurs sont colinéaires, donc les points sont alignés...

Exercice 7 : On considère les points $A\,(-3;-1)$, $B\,(2;1)$.

1. Calculer les coordonnées de I milieu de $[AB]$.
2. Soit $C\left(-5;-\dfrac{9}{5}\right)$. Montrer que les points A, B et C sont alignés.
3. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires et calculer le coefficient de colinéarité.

Exercice 8 : On considère un nombre réel α . Déterminer la valeur de α pour que les vecteurs soient colinéaires :

1. Pour $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\alpha+1\\\alpha-7\end{pmatrix}$.

Solution :

Pour la colinéarité, on utilise le déterminant :

$$\begin{array}{rrcl} & \det(\vec{u},\vec{v}) & = & 0\\ \Leftrightarrow & \alpha(\alpha-7)-(-2)(2\alpha+1) & = & 0\\ \Leftrightarrow & \alpha^2-3\alpha+2 & = & 0\end{array}$$

L'équation étant une équation du second degré, le calcul du discriminent puis des solutions permettent de trouver deux valeurs possible de α : 1 et 2...

2. Pour $\vec{u}\begin{pmatrix}3\alpha\\2\alpha-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}12\\3\alpha-7\end{pmatrix}$.

Solution :

Pour la colinéarité, on utilise le déterminant :

$$\begin{array}{rrcl} & \det(\vec{u},\vec{v}) & = & 0\\ \Leftrightarrow & 3\alpha(3\alpha-7)-12(2\alpha-3) & = & 0\\ \Leftrightarrow & 9\alpha^2-45\alpha+36 & = & 0\\ \Leftrightarrow & \alpha^2-5\alpha+4 & = & 0\end{array}$$

L'équation étant une équation du second degré, le calcul du discriminent puis des solutions permettent de trouver deux valeurs possible de α : 1 et 4...