Fiche 6

Correction

Exercice 1 : Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = 2e^x + e^{3x} - 2e^{5x}$

Solution :

La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
On a, $\forall x \in \mathbb{R}$:
$f_1'(x) = 2e^x + 3e^{3x} - 10e^{5x}$

- $f_2(x) = (-x-5)e^{-x}$

Solution :

La fonction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
On a, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= (-1)e^{-x} + (-x-5)(-e^{-x}) \\ &= (-1+x+5)e^{-x} \\ &= (4+x)e^{-x} \end{aligned}$$

- $f_3(x) = \dfrac{x+3}{e^x}$

Solution :

La fonction f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, dont le dénominateur de s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On a, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= \frac{(1)e^x - (x+3)e^x}{(e^x)^2} \\ &= \frac{(-x-2)e^x}{(e^x)^2} \\ &= \frac{-x-2}{e^x} \end{aligned}$$

- $f_4(x) = \dfrac{5e^{3x-4}}{x^2+1}$

Solution :

La fonction f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, dont le dénominateur de s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On a, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= \frac{15e^{3x-4}(x^2+1) - 5e^{3x-4}(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(15x^2+15-10x)e^{3x-4}}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(15x^2-10x+15)e^{3x-4}}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Exercice 2 : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (5x+2)e^{2x}$$

1. Déterminer la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Solution :

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
On a, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5e^{2x} + (5x+2)(2e^{2x}) \\ &= (5+10x+4)e^{2x} \\ &= (10x+9)e^{2x} \end{aligned}$$

2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Solution :

La dérivée est donnée par l'équation :
$T_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
Avec :

- $f(0) = 2e^0 = 2$
- $f'(0) = 9e^0 = 9$

On trouve donc : $T_0 : y = 9x + 2$

3. Établir le tableau de variation de la fonction f.

Solution :

- La fonction affine : $x \to 10x+9$ s'annule pour $x = -\dfrac{9}{10}$. Elle est négative, puis positive.
- La fonction exponentielle est toujours strictement positive.

De plus, les limites de la fonction sont :

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Enfin, la valeur de l'image par f du minimum :
$f\left(-\dfrac{9}{10}\right) = -\dfrac{5}{2}e^{-\frac{9}{5}}$ On trouve donc :

x	$-\infty$		$-\frac{9}{10}$		$+\infty$
$10x+9$		$-$	0	$+$	
e^{2x}			$+$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{5}{2}e^{-\frac{9}{5}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 3 : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (6x^2 - 34x + 33)e^{-2x}$$

1. Déterminer la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Solution :

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
On a, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (12x - 34)e^{-2x} + (6x^2 - 34x + 33)(-2e^{-2x}) \\ &= (12x - 34 - 12x^2 + 68x - 66)e^{-2x} \\ &= (-12x^2 + 80x - 100)e^{-2x} \end{aligned}$$

2. Établir le tableau de variation de la fonction f.

Solution :

On pose :
$p(x) = -12x^2 + 80x - 100$
On a : $\Delta = 1600$, on trouve deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{5}{3}$ et $x_2 = 5$.
De plus, les limites de la fonction sont :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Enfin, les valeurs des l'image par f extremuma locaux :
$f\left(\dfrac{5}{3}\right) = -7e^{-\frac{10}{3}}$ et $f(5) = 13e^{-10}$ On trouve donc :

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		5		0
$p(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
e^{-2x}				$+$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-7e^{-\frac{10}{3}}$	$\nearrow$	$13e^{-10}$	$\searrow$	$+\infty$

<u>Exercice 4 :</u> Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = e^3 \times (e^{-4})^2$

Solution :

$A = e^3 \times (e^{-4})^2 = e^3 \times (e^{-8}) = e^{-5}$

2. $B = \dfrac{e^3}{(e^{-2})^3}$

Solution :

$$B = \frac{e^3}{(e^{-2})^3} = \frac{e^3}{e^{-6}} = e^9$$

3. $C = \left(e^3 - e^{-3}\right)^2 - e^{-3}\left(e^9 + e^{-3}\right)$.

Solution :

$C = \left(e^3 - e^{-3}\right)^2 - e^{-3}\left(e^9 + e^{-3}\right) = e^6 - 2e^3 \times e^{-3} + e^{-6} - e^6 - e^{-6} = -2e^0 = -2.$

<u>Exercice 5 :</u> Montrer les égalités suivantes :

(a) $\dfrac{1 - e^x}{e^{2x}} = e^{-2x} - e^{-x}$

Solution :

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^x}{e^{2x}} &= (1 - e^x)e^{-2x} \\ &= e^{-2x} - e^{-x} \end{aligned}$$

(b) $\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)^2=\dfrac{e^{8x}-2e^{4x}+1}{e^{4x}}$

Solution :

$$\begin{aligned}\frac{e^{8x}-2e^{4x}+1}{e^{4x}} &= e^{4x}-2e^{0}+e^{-4x}\\ &= \left(e^{2x}-e^{-2x}\right)^2\end{aligned}$$

Exercice 6 : Résoudre les équations suivantes :

(a) $e^x=e^3$

Solution :

$e^x=e^3 \Leftrightarrow x=3$

$S=\{3\}$

(b) $e^{3x+2}=e^{3-x}$

Solution :

$$\begin{aligned} & e^{3x+2}=e^{3-x}\\ \Leftrightarrow\ & 3x+2=3-x\\ \Leftrightarrow\ & 4x=1\\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$S=\left\{\dfrac{1}{4}\right\}$

(c) $e^{x^2+1}=-4$

Solution :

On sait que, $\forall x\in\mathbb{R}, e^{x^2+1}>0$, donc l'équation est impossible.

$S=\emptyset$

(d) $e^{x^2+x}=1$

Solution :

$$\begin{aligned} & e^{x^2+x}=1\\ \Leftrightarrow\ & e^{x^2+x}=e^0\\ \Leftrightarrow\ & x^2+x=0\\ \Leftrightarrow\ & x(x+1)=0\\ \Leftrightarrow\ & x=0 \text{ ou } x=-1\end{aligned}$$

$S=\{0;-1\}$

(e) $e^{2x} = e$

Solution :

$$\begin{aligned} & e^{2x} = e \\ \Leftrightarrow \quad & e^{2x} = e^1 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

(f) $e^{3x^2-2} = (e^{x+3})^2$

Solution :

$$\begin{aligned} & e^{3x^2-2} = (e^{x+3})^2 \\ \Leftrightarrow \quad & e^{3x^2-2} = e^{2x+6} \\ \Leftrightarrow \quad & 3x^2 - 2 = 2x + 6 \\ \Leftrightarrow \quad & 3x^2 - 2x - 8 = 0 \end{aligned}$$

On retrouve un polynôme du second degrés...
On a : $\Delta = 100$ et deux solutions :
$x_1 = 2$ et $x_2 = -\frac{4}{3}$. $S = \left\{2; -\frac{4}{3}\right\}$

Exercice 7 : Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $e^3 e^x < 1$

Solution :

$$\begin{aligned} & e^3 e^x < 1 \\ \Leftrightarrow \quad & e^{x+3} < e^0 \\ \Leftrightarrow \quad & x + 3 < 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x < -3 \end{aligned}$$

$S =]-\infty; -3[$

(b) $5e^{2x-1} > -2$

Solution :

On sait que, $\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x-1} > 0$, donc l'équation est toujours vraie.
$S = \mathbb{R}$

(c) $e^{3x} \leq \frac{e}{e^{x-5}}$

Solution :

$$\begin{aligned} & e^{3x} \leq \frac{e}{e^{x-5}} \\ \Leftrightarrow \quad & e^{3x} \leq e^{-x+6} \\ \Leftrightarrow \quad & 3x \leq -x+6 \\ \Leftrightarrow \quad & 4x \leq 6 \\ \Leftrightarrow \quad & x \leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$S = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$

(d) $e^{2x}\left(1-e^{3x}\right)(3x+1) > 0$

Solution :

- $e^{2x} > 0$, pour tout réel x.
- $1 - e^{3x} \geq 0$
  $$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & e^{3x} \leq 1 \\ \Leftrightarrow \quad & e^{3x} \leq e^{0} \\ \Leftrightarrow \quad & 3x \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x \leq 0 \end{aligned}$$
- $3x + 1 \geq 0$
  $\Leftrightarrow \quad x \geq -\frac{1}{3}$

On fait alors un tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
e^{2x}		$+$		$+$		$+$	
$1 - e^{3x}$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^{2x}\left(1-e^{3x}\right)(3x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc on trouve : $S = \left]-\frac{1}{3}; 0\right[$

Exercice 8 :

1. Résoudre l'inéquation suivante :

$$x^2 + 5x - 6 \geq 0$$

Solution :

On cherche $\Delta = 49$, il y a deux racines réelles : $x_1 = 1$ et $x_2 = -6$. Avec la règle du « signe de a à l'extérieur des racines », on trouve :
$S =]-\infty; -6] \cup [1; +\infty[$

2. En déduire la résolution de l'équation :

$$e^{2x} + 5e^x - 6 \geqslant 0$$

Solution :

En effectuant un petit changement de variables :
On pose $X = e^x$, on a $X^2 = e^{2x}$, donc l'inéquation devient :

$$e^{2x} + 5e^x - 6 \geqslant 0 \Leftrightarrow X^2 - 5X + 6 \geqslant 0$$

D'après la question précédente, on a :

$$\begin{array}{ll} & e^{2x} + 5e^x - 6 \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow & X^2 + 5X - 6 \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow & X \leqslant -6 \text{ ou } X \geqslant 1 \\ \Leftrightarrow & e^x \leqslant -6 \text{ ou } e^x \geqslant 1 \end{array}$$

La première inéquation étant impossible, on obtient :

$$\begin{array}{ll} & e^{2x} + 5e^x - 6 \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow & e^x \geqslant 1 \\ \Leftrightarrow & e^x \geqslant e^0 \\ \Leftrightarrow & x \geqslant 0 \end{array}$$

Donc : $S = [0; +\infty[$

Exercice 9 : Le but de l'exercice est la démonstration de l'égalité suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad e^{x+y} = e^x \times e^y$$

1. Cas particulier : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{x+5}}{e^x}$$

Montrer que la fonction f est constante, et donnée la valeur de cette constante.

Solution :

Pour montrer qu'une fonction est constante, il suffit de montrer que la dérivée de la fonction est nulle :
$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^{x+5}e^x - e^{x+5}e^x}{(e^x)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

La fonction f est donc bien constante sur $\mathbb{R}$, elle est donc toujours égale à un même nombre, quelque soit x. On peut tester pour $x = 0$: $f(0) = \dfrac{e^{0+5}}{e^0} = e^5$
Pour tout x réel, on a donc : $f(x) = e^5$.

On a donc montrer que, $\frac{e^{x+5}}{e^x} = e^5 \Leftrightarrow e^{x+5} = e^x \times e^5$.

2. On pose $y \in \mathbb{R}$.
   On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{e^{x+y}}{e^x}$$

   (a) Montrer que la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$.

Solution :

La constant y ne dépend pas de x. Donc, comme toute les constantes additives, sa dérivée est nulle.
On dérive donc la fonction g comme la fonction de l'exercice 1 : $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{e^{x+y}e^x - e^{x+y}e^x}{(e^x)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

La fonction g est donc bien constante sur $\mathbb{R}$.

   (b) En déduire l'égalité.

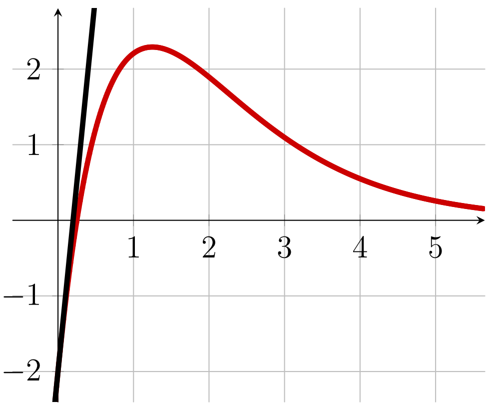
Solution :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x)$ est donc toujours égale à un même nombre, quelque soit x. On peut tester pour $x = 0$: $g(0) = \frac{e^{0+y}}{e^0} = e^y$
Pour tout x réel, on a donc : $g(x) = e^y$.
On a donc montrer que, $\frac{e^{x+y}}{e^x} = e^y \Leftrightarrow e^{x+y} = e^x \times e^y$.
Ce qui achève bien la démonstration.

Exercice 10 : Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 5]$ par

$$f(x) = (ax - 2)\mathrm{e}^{-x},$$

où a est un nombre réel.
La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous :



Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ passent toutes les deux par le point $A(0\ ;\ -2)$.
La droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A et admet pour équation $y = 10x - 2$.

1. Donner, à l'aide des informations ci-dessus et sans justifier les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

Solution :

- $f(0)$ correspond à l'image par f de 0, on l'obtient donc grâce au point $A(0\ ;\ -2)$. On a donc : $f(0) = -2$.
- $f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la tangent au point d'abscisse 0, on l'obtient donc grâce à l'équation de $\mathscr{D}$. On a donc : $f'(0) = 10$.

2. (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ on a :

$$f'(x) = (-ax + a + 2)\mathrm{e}^{-x}$$

Solution :

La fonction est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ comme produit de fonctions dérivables sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$. On a :
$\forall x \in [0\ ;\ 5]$

$$\begin{aligned} f'(x) &= a\mathrm{e}^{-x} + (ax-2)(-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= (a - (ax-2))\,\mathrm{e}^{-x} \\ &= (-ax + a + 2)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

(b) Déduire des questions précédentes que $a = 8$.

Solution :

On sait que $f'(0) = 10$:

$$\begin{aligned} f'(0) = 10 &\Leftrightarrow (-a \times 0 + a + 2)\mathrm{e}^{-0} = 10 \\ &\Leftrightarrow a + 2 = 10 \\ &\Leftrightarrow a = 8 \end{aligned}$$

(c) Donner l'expression de $f'(x)$.

Solution :

On utilise la valeur de a :
$f'(x) = (-8x + 8 + 2)\mathrm{e}^{-x} = (-8x + 10)\mathrm{e}^{-x}$

3. (a) Préciser le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$. On pourra faire un tableau.

Solution :

On obtient le tableau de variation en f sur $[0\ ;\ 5]$ intégrant le tableau de signe de la dérivée.
Le signe de $p(x) = -8x + 10$ est le signe d'une forme affine dont l'unique annulateur est $\frac{5}{4}$. On complète le tableau avec :

- $f(0) = -2$

- $f\left(\frac{5}{4}\right) = \left(8 \times \frac{5}{4} - 2\right) e^{-\frac{5}{4}} = 8e^{-\frac{5}{4}}$
- $f(5) = (8 \times 5 - 2)\, e^{-5} = 38e^{-5}$

x	0		$\frac{5}{4}$		5
$-8x+10$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-2	$\nearrow$	$8e^{-\frac{5}{4}}$	$\searrow$	$38e^{-5}$

(b) En déduire le tableau des variations de la fonction f sur ce même intervalle.

Solution :

Voir question précédente.

(c) Résoudre sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ l'équation $f(x) = 0$.

Solution :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (8x-2)e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow 8x - 2 = 0 \text{ ou } e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Car l'exponentielle ne s'annule jamais...

On a donc : $\boxed{S = \left\{\frac{1}{4}\right\}}$

4. Une entreprise fabrique des grille-pains. Après avoir fait une étude, son directeur constate que si l'entreprise fabrique chaque jour x milliers de grille-pains (où x est un nombre réel de l'intervalle $[0\ ;\ 5]$), alors le bénéfice quotidien est donné, en centaine de milliers d'euros, par la fonction f définie par :

$$f(x) = (8x-2)e^{-x}$$

(a) Quelle quantité de grille-pains l'entreprise doit-elle fabriquer afin de réaliser un bénéfice maximal ?

Solution :

D'après l'étude précédente, elle doit fabriquer $x_0 = \frac{5}{4} = 1,25$ milliers de grille-pains, soit 1250 grille-pains.

(b) Quel est alors la valeur de ce bénéfice maximal ?
On donnera une valeur approchée du résultat à l'euro près.

Solution :

Le bénéfice maximal est donc $8e^{-\frac{5}{4}} = 2.29203$ à 10^{-5} près, mais en centaine de milliers d'euros, soit 229 203 €. (ils sont en or ces grille-pains ? ? ?)

Exercice 11 : La variation de la température d'un corps, ou d'un liquide, laissé dans un environnement à une température ambiante constante, suit la loi de Newton :

$$\frac{dT}{dt} = k\,(T - T_A)$$

où T_A est la température ambiante constante.
k est une constante de proportionnalité qui dépend des conditions expérimentales. Cette constante est négative.
t est le temps, habituellement donné en minutes.
T est la température du corps. Cette température varie ; on pourrait la noter $T(t)$. On suppose que la température est maintenue homogène dans le liquide, ou le corps.

La grand-mère de Théo sort un gratin du four, le plat étant alors à 100 $^\circ$C. Elle conseille à son petit-fils de ne pas le toucher afin de ne pas se brûler, et de laisser le plat se refroidir dans la cuisine dont la température ambiante est supposée constante à 20 $^\circ$C. Théo lui rétorque que quand il sera à 37 $^\circ$C, il pourra le toucher sans risque ; et sa grand-mère lui répond qu'il lui faudra attendre 30 minutes pour cela. La température du plat est donnée par une fonction g du temps t, exprimé en minutes, qui est solution de l'équation différentielle :

$$y' + 0,04y = 0,8$$

1. Retrouver la loi de Newton.

Solution :

$$\begin{aligned} y' + 0,04y = 0,8 &\Leftrightarrow y' = -0,04y + 0,8 \\ &\Leftrightarrow y' = -0,04(y - 20) \end{aligned}$$

On retrouve donc la loi de Newton, avec $k = -0,04$ et $T_A = 20$, qui est la température ambiante.

2. A l'aide d'un logiciel de calcul formel, Théo a trouvé la solution de l'équation différentielle :

$$g(t) = 80e^{-0.04t} + 20$$

Vérifier que la fonction g satisfaisant bien le problème : la condition initiale, et l'équation différentielle.

Solution :

- La condition initial, à $t = 0$, on doit trouvé une température de 100 $^\circ$C.
  On a $g(0) = 80e^{-0.04\times 0} + 20 = 80 + 20 = 100$.
- Pour vérifier que g est une solution de l'équation différentielle, il suffit de remplacer y par g, et y' par g'...
  Donc on commence par dérivée la fonction :
  $g'(t) = 80 \times (-0,04)e^{-0.04t} = -3,2e^{-0.04t}$.

On a :

$$\begin{aligned} g'(t)+0,04g(t) &= -3,2e^{-0.04t}+0,04\left(80e^{-0.04t}+20\right) \\ &= -3,2e^{-0.04t}+3,2e^{-0.04t}+0,8 \\ &= 0,8 \end{aligned}$$

Donc ça marche !!!

Donc la fonction g est bien la solution au problème...

3. La grand-mère de Théo a-t-elle bien évalué le temps nécessaire pour atteindre 37 $^\circ$C ?

Solution :

La grand-mère propose un temps d'une demi-heure :
$g(30) = 44.1$ à 10^{-1} près... Donc c'est trop chaud... il faut attendre encore.
En utilisant un tableau de valeurs, on constate que :

- $g(38) = 37,5$ à 10^{-1} près.
- $g(39) = 36,8$ à 10^{-1} près.

Donc le plat sera à 37 $^\circ$C entre la 38 ième et 39 ième minute...

Exercice 12 : On considère trois paramètres réels positifs :a, b et k.
On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad , \quad f(t) = ae^{-kt} + b$$

On suppose que $f(t)$ représente la température de l'eau dans bol et t le temps en minute.
On établie les éléments suivants :

- Initialement, à $t = 0$, l'eau est à 88 $^\circ$C.
- Puis on laisse le bol dans un pièce à une température constante de 20 $^\circ$C.
- Au bout d'un quart d'heure, l'eau était à 59 $^\circ$C.

1. Établir que $a + b = 88$.

Solution :

On a $f(0) = 98 \Leftrightarrow ae^{-k\times 0} + b = 88 \Leftrightarrow a + b = 88$.

2. On laissant le bol plusieurs heures, à quelle température le bol va-t-il tendre ? En déduire la valeur de b. (on pourra prendre une valeur de t assez grande...)

Solution :

Le bol tend à prendre la température de la salle, soit 20 $^\circ$C.
Pour t suffisamment grand, on constate que e^{-kt} tend vers 0. On a donc $b = 20$.

3. En déduire la valeur de a.

Solution :

On a $b = 20$ et $a + b = 88$, donc $a = 68$...

4. Donner la valeur approchée de $e^{-0,6931}$.

Solution :

En utilisant la calculatrice, on a : $e^{-0,6931} \backsimeq 0,5$.

5. En déduire la valeur approchée de k (on donnera une valeur à 10^{-4} près.

Solution :

On sait que $f(t) = ae^{-kt} + b = 68e^{-kt} + 20$.
De plus, pour $t = 15$, on a $f(15) = 59$, ce qui donne :
$68e^{-15k} + 20 = 59 \Leftrightarrow e^{-kt} = \dfrac{39}{68} \Leftrightarrow e^{-15k} = \dfrac{1}{2} = 0,5$ Or on a $e^{-0,6931} \backsimeq 0,5$, ce qui donne $e^{-15k} = e^{-0,6931} \Leftrightarrow -15k = -0,6931 \Leftrightarrow k = \dfrac{0,6931}{15} \backsimeq 0,0462$.
On trouve donc, à 10^{-4} près, $k = 0,0462$.

6. Quelle sera la température du bol au bout d'une demi heure ?

Solution :

On connait maintenant la fonction : $f(t) = 68e^{-0,0462t} + 20$. Donc, pour $t = 30$, on a : $f(30) = 68e^{-0,0462\times 30} + 20 \backsimeq 37$
Au bout de 30 minutes, le bol est donc à une température approximative de 37 $^\circ$C.

Exercice 13 :

1. On considère la suite (u_n), suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = e^{u_n}$.
Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

Solution :

Rappel : la suite (u_n) est suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + 2$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= e^{u_{n+1}} \\ &= e^{u_n+2} \\ &= e^2e^{u_n} \\ &= e^2v_n \end{aligned}$$

On a donc bien une suite géométrique de raison $q = e^2$ et de premier terme $v_0 = e^{u_0} = e^3$.

2. On considère la suite (u_n), suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $-\dfrac{1}{2}$.
   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = e^{u_n}$.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

Solution :

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= e^{u_{n+1}} \\ &= e^{u_n - \frac{1}{2}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}} e^{u_n} \\ &= e^{-\frac{1}{2}} v_n \\ &= \frac{v_n}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

On a donc bien une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ et de premier terme $v_0 = e^{u_0} = e^5$.