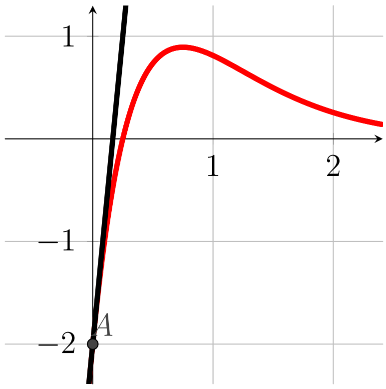
Fiche 6 bis

Exercices sur le fonction exponentielle

Exercice 1 : Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ par

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-2x},$$

où a est un nombre réel.
La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous :



Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ passent toutes les deux par le point $A(0\ ;\ -2)$.
La droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A et admet pour équation $y = 12x - 2$.

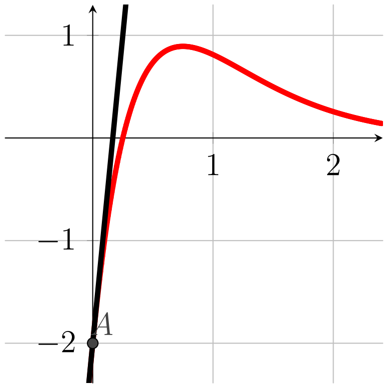
1. Donner, à l'aide des informations ci-dessus et sans justifier la valeurs de $f(0)$.
2. En déduire la valeur de b.
3. On admet ici que $b = -2$.
   (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ on a :
   $$f'(x) = (-2ax + a + 4)\mathrm{e}^{-2x}$$
   (b) Donner, à l'aide des informations ci-dessus et sans justifier la valeurs de $f'(0)$.
   (c) Déduire des questions précédentes que $a = 8$.
   (d) Donner l'expression de $f'(x)$.
4. (a) Préciser le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$. On pourra faire un tableau.
   (b) En déduire le tableau des variations de la fonction f sur ce même intervalle.
5. Une entreprise fabrique des grille-pains. Après avoir fait une étude, son directeur constate que si l'entreprise fabrique chaque jour x milliers de grille-pains (où x est un nombre réel de l'intervalle $[0\ ;\ 5]$), alors le bénéfice quotidien est donné, en centaine de milliers d'euros, par la fonction f définie par :
   $$f(x) = (8x-2)\mathrm{e}^{-2x}$$
   (a) Quelle quantité de grille-pains l'entreprise doit-elle fabriquer afin de réaliser un bénéfice maximal ?
   (b) Quel est alors la valeur de ce bénéfice maximal ?
   On donnera une valeur approchée du résultat à l'euro près.

Fiche 6 bis
Correction

Exercice 1 : Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ par

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-2x},$$

où a est un nombre réel.
La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous :



Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ passent toutes les deux par le point $A(0\ ;\ -2)$.
La droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A et admet pour équation $y = 12x - 2$.

1. Donner, à l'aide des informations ci-dessus et sans justifier la valeurs de $f(0)$.

Solution :
$f(0)$ correspond à l'image par f de 0, on l'obtient donc grâce au point $A(0\ ;\ -2)$.
On a donc : $f(0) = -2$.

2. En déduire la valeur de b.

Solution :
On a :
$f(0) = -2 \Rightarrow (a \times 0b)\mathrm{e}^0 = -2 \Rightarrow b = -2$.

3. On admet ici que $b = -2$.

   (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ on a :

$$f'(x) = (-2ax + a + 4)\mathrm{e}^{-2x}$$

Solution :

La fonction est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ comme produit de fonctions dérivables sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$. On a :

$\forall x \in [0\ ;\ 5]$

$$\begin{aligned} f'(x) &= a\mathrm{e}^{-2x} + (ax-2)(-2\mathrm{e}^{-2x}) \\ &= (a-2(ax-2))\,\mathrm{e}^{-x} \\ &= (-2ax+a+4)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

(b) Donner, à l'aide des informations ci-dessus et sans justifier la valeurs de $f'(0)$.

Solution :

$f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la tangent au point d'abscisse 0, on l'obtient donc grâce à l'équation de $\mathscr{D}$. On a donc : $f'(0) = 12$.

(c) Déduire des questions précédentes que $a = 8$.

Solution :

On sait que $f'(0) = 12$:

$$\begin{aligned} f'(0) = 12 &\Leftrightarrow (-2a \times 0 + a + 4)\mathrm{e}^{-0} = 12 \\ &\Leftrightarrow a + 4 = 12 \\ &\Leftrightarrow a = 8 \end{aligned}$$

(d) Donner l'expression de $f'(x)$.

Solution :

On utilise la valeur de a :

$f'(x) = (-2 \times 8x + 8 + 4)\mathrm{e}^{-x} = (-16x + 12)\mathrm{e}^{-x}$

4. (a) Préciser le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$. On pourra faire un tableau.

Solution :

On obtient le tableau de variation en f sur $[0\ ;\ 5]$ intégrant le tableau de signe de la dérivée.

Le signe de $p(x) = -16x + 12$ est le signe d'une forme affine dont l'unique annulateur est $\dfrac{3}{4}$. On complète le tableau avec :

- $f(0) = -2$
- $f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \left(8 \times \dfrac{3}{4} - 2\right)\mathrm{e}^{-2\times\frac{3}{4}} = 4\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$
- $f(5) = (8 \times 5 - 2)\,\mathrm{e}^{-2\times 5} = 38\mathrm{e}^{-10}$

x	0		$\frac{5}{4}$		5
$-8x+10$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-2	$\nearrow$	$4e^{-\frac{3}{2}}$	$\searrow$	$38e^{-10}$

(b) En déduire le tableau des variations de la fonction f sur ce même intervalle.

Solution :

Voir question précédente.

5. Une entreprise fabrique des grille-pains. Après avoir fait une étude, son directeur constate que si l'entreprise fabrique chaque jour x milliers de grille-pains (où x est un nombre réel de l'intervalle $[0\ ;\ 5]$), alors le bénéfice quotidien est donné, en centaine de milliers d'euros, par la fonction f définie par :

$$f(x) = (8x-2)e^{-2x}$$

(a) Quelle quantité de grille-pains l'entreprise doit-elle fabriquer afin de réaliser un bénéfice maximal ?

Solution :

D'après l'étude précédente, elle doit fabriquer $x_0 = \dfrac{3}{4} = 0,75$ milliers de grille-pains, soit 750 grille-pains.

(b) Quel est alors la valeur de ce bénéfice maximal ?
On donnera une valeur approchée du résultat à l'euro près.

Solution :

Le bénéfice maximal est donc $4e^{-\frac{3}{2}} = 0.89252$ à 10^{-5} près, mais en centaine de milliers d'euros, soit 89 252 €. (ils sont en or ces grille-pains ? ? ?)