Fiche 6

Exercices sur le fonction exponentielle

Exercice 1 : Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = 2e^x + e^{3x} - 2e^{5x}$
- $f_2(x) = (-x-5)e^{-x}$
- $f_3(x) = \dfrac{x+3}{e^x}$
- $f_4(x) = \dfrac{5e^{3x-4}}{x^2+1}$

Exercice 2 : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (5x+2)e^{2x}$$

1. Déterminer la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
3. Établir le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 3 : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (6x^2 - 34x + 33)e^{-2x}$$

1. Déterminer la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Établir le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 4 : Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = e^3 \times (e^{-4})^2$
2. $B = \dfrac{e^3}{(e^{-2})^3}$
3. $C = \left(e^3 - e^{-3}\right)^2 - e^{-3}\left(e^9 + e^{-3}\right)$.

Exercice 5 : Montrer les égalités suivantes :

(a) $\dfrac{1-e^x}{e^{2x}} = e^{-2x} - e^{-x}$

(b) $\left(e^{2x} - e^{-2x}\right)^2 = \dfrac{e^{8x} - 2e^{4x} + 1}{e^{4x}}$

Exercice 6 : Résoudre les équations suivantes :

(a) $e^x = e^3$

(b) $e^{3x+2} = e^{3-x}$

(c) $e^{x^2+1} = -4$

(d) $e^{x^2+x} = 1$

(e) $e^{2x} = e$

(f) $e^{3x^2-2} = (e^{x+3})^2$

Exercice 7 : Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $e^3 e^x < 1$

(b) $5e^{2x-1} > -2$

(c) $e^{3x} \leq \dfrac{e}{e^{x-5}}$

(d) $e^{2x}\left(1-e^{3x}\right)(3x+1) > 0$

Exercice 8 :

1. Résoudre l'inéquation suivante :

$$x^2 + 5x - 6 \geqslant 0$$

2. En déduire la résolution de l'équation :

$$e^{2x} + 5e^x - 6 \geqslant 0$$

Exercice 9 : Le but de l'exercice est la démonstration de l'égalité suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad e^{x+y} = e^x \times e^y$$

1. Cas particulier : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{x+5}}{e^x}$$

Montrer que la fonction f est constante, et donnée la valeur de cette constante.

2. On pose $y \in \mathbb{R}$.
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{e^{x+y}}{e^x}$$

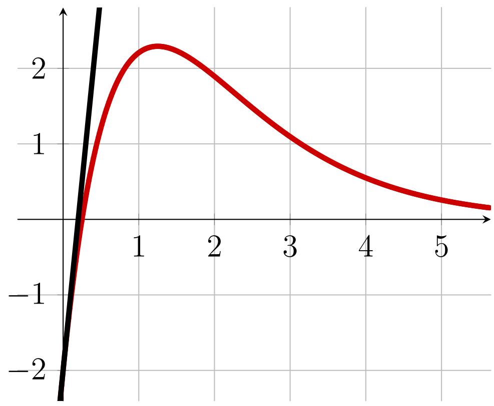
(a) Montrer que la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduire l'égalité.

Exercice 10 : Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ par

$$f(x) = (ax - 2)\mathrm{e}^{-x},$$

où a est un nombre réel.
La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous :



Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ passent toutes les deux par le point $A(0\ ;\ -2)$.
La droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A et admet pour équation $y = 10x - 2$.

1. Donner, à l'aide des informations ci-dessus et sans justifier les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ on a :

$$f'(x) = (-ax + a + 2)\mathrm{e}^{-x}$$

   (b) Déduire des questions précédentes que $a = 8$.
   (c) Donner l'expression de $f'(x)$.
3. (a) Préciser le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$. On pourra faire un tableau.
   (b) En déduire le tableau des variations de la fonction f sur ce même intervalle.
   (c) Résoudre sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ l'équation $f(x) = 0$.
4. Une entreprise fabrique des grille-pains. Après avoir fait une étude, son directeur constate que si l'entreprise fabrique chaque jour x milliers de grille-pains (où x est un nombre réel de l'intervalle $[0\ ;\ 5]$), alors le bénéfice quotidien est donné, en centaine de milliers d'euros, par la fonction f définie par :

$$f(x) = (8x - 2)\mathrm{e}^{-x}$$

   (a) Quelle quantité de grille-pains l'entreprise doit-elle fabriquer afin de réaliser un bénéfice maximal ?
   (b) Quel est alors la valeur de ce bénéfice maximal ?
   On donnera une valeur approchée du résultat à l'euro près.

Exercice 11 : La variation de la température d'un corps, ou d'un liquide, laissé dans un environnement à une température ambiante constante, suit la loi de Newton :

$$\frac{dT}{dt} = k\,(T - T_A)$$

où T_A est la température ambiante constante.
k est une constante de proportionnalité qui dépend des conditions expérimentales. Cette constante est négative.
t est le temps, habituellement donné en minutes.
T est la température du corps. Cette température varie ; on pourrait la noter $T(t)$. On suppose que la température est maintenue homogène dans le liquide, ou le corps.

La grand-mère de Théo sort un gratin du four, le plat étant alors à 100 $^\circ$C. Elle conseille à son petit-fils de ne pas le toucher afin de ne pas se brûler, et de laisser le plat se refroidir dans la cuisine dont la température ambiante est supposée constante à 20 $^\circ$C. Théo lui rétorque que quand il sera à 37 $^\circ$C, il pourra le toucher sans risque ; et sa grand-mère lui répond qu'il lui faudra attendre 30 minutes pour cela. La température du plat est donnée par une fonction g du temps t, exprimé en minutes, qui est solution de l'équation différentielle :

$$y' + 0,04y = 0,8$$

1. Retrouver la loi de Newton.
2. A l'aide d'un logiciel de calcul formel, Théo a trouvé la solution de l'équation différentielle :

   $$g(t) = 80e^{-0.04t} + 20$$

   Vérifier que la fonction g satisfaisant bien le problème : la condition initiale, et l'équation différentielle.
3. La grand-mère de Théo a-t-elle bien évalué le temps nécessaire pour atteindre 37 $^\circ$C ?

Exercice 12 : On considère trois paramètres réels positifs :a, b et k.
On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad , \quad f(t) = ae^{-kt} + b$$

On suppose que $f(t)$ représente la température de l'eau dans bol et t le temps en minute. On établie les éléments suivants :

- Initialement, à $t = 0$, l'eau est à 88 $^\circ$C.
- Puis on laisse le bol dans un pièce à une température constante de 20 $^\circ$C.
- Au bout d'un quart d'heure, l'eau était à 59 $^\circ$C.

1. Établir que $a + b = 88$.
2. On laissant le bol plusieurs heures, à quelle température le bol va-t-il tendre ? En déduire la valeur de b. (on pourra prendre une valeur de t assez grande...)
3. En déduire la valeur de a.
4. Donner la valeur approchée de $e^{-0,6931}$.

5. En déduire la valeur approchée de k (on donnera une valeur à 10^{-4} près.

6. Quelle sera la température du bol au bout d'une demi heure ?

Exercice 13 :

1. On considère la suite (u_n), suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.
   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = e^{u_n}$.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

2. On considère la suite (u_n), suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $-\dfrac{1}{2}$.
   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = e^{u_n}$.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique.