Fiche 5 +

Variable aléatoire

Exercice 1 : Un restaurant propose à sa carte deux types de desserts :

- un assortiment de macarons choisis par 50 % des clients ;
- une part de tarte tatin choisie par 30 % des clients.

On sait que 20 % des clients ne prennent pas de dessert et aucun client ne prend plusieurs desserts.
Le restaurateur a remarqué que :

- parmi les clients ayant pris un assortiment de macarons, 80 % prennent un café ;
- parmi les clients ayant pris une part de tarte tatin, 60 % prennent un café ;
- parmi les clients n'ayant pas pris de dessert, 90 % prennent un café.

On interroge au hasard un client de ce restaurant. On note :

- M l'événement : « Le client prend un assortiment de macarons » ;
- T l'événement : « Le client prend une part de tarte tatin » ;
- P l'événement : « Le client ne prend pas de dessert » ;
- C l'événement : « Le client prend un café ».

1. Construire l'arbre de probabilité associé à la situation.
2. (a) Calculer la probabilité que le client prenne un café et un assortiment de macarons.
   (b) Montrer que la probabilité que le client prenne un café est égale à $0,76$.
3. Un assortiment de macarons est vendu 6 euros, une part de tarte tatin est vendue 8 euros et un café est vendu 2 euros.

   Chaque client prend un plat, et un seul, au prix unique de 18 euros et ne prend pas plus d'un dessert ni plus d'un café.
   Soit X la variable aléatoire égale à la somme totale dépensée par le client.

   (a) Déterminer les différentes valeurs de la variable X .
   (b) Déterminer la loi de probabilité de X .
   (c) Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

Fiche 5 +

Correction

Exercice 1 : Un restaurant propose à sa carte deux types de desserts :

- un assortiment de macarons choisis par 50 % des clients ;
- une part de tarte tatin choisie par 30 % des clients.

On sait que 20 % des clients ne prennent pas de dessert et aucun client ne prend plusieurs desserts.
Le restaurateur a remarqué que :

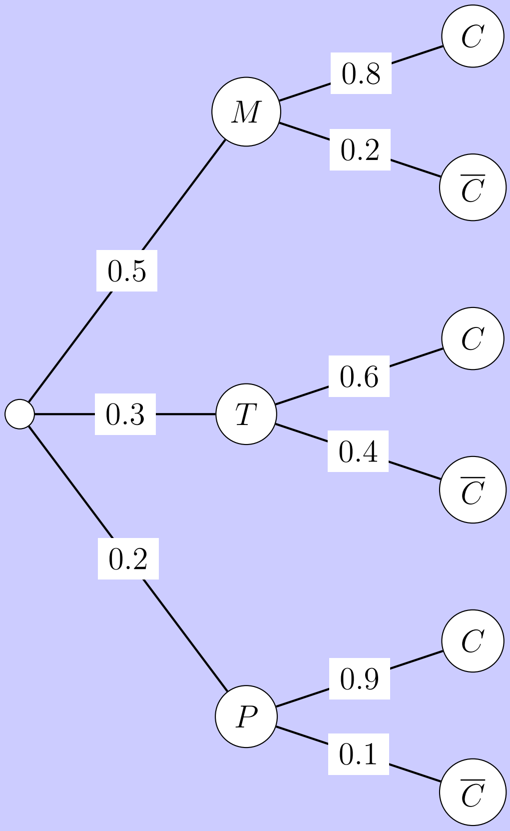
- parmi les clients ayant pris un assortiment de macarons, 80 % prennent un café ;
- parmi les clients ayant pris une part de tarte tatin, 60 % prennent un café ;
- parmi les clients n'ayant pas pris de dessert, 90 % prennent un café.

On interroge au hasard un client de ce restaurant. On note :

- M l'événement : « Le client prend un assortiment de macarons » ;
- T l'événement : « Le client prend une part de tarte tatin » ;
- P l'événement : « Le client ne prend pas de dessert » ;
- C l'événement : « Le client prend un café ».

1. Construire l'arbre de probabilité associé à la situation.

Solution :



2. (a) Calculer la probabilité que le client prenne un café et un assortiment de macarons.

Solution :
On cherche $P(M \cap C)$:
$P(M \cap C) = P(M) \times P_M(C) = 0.5 \times 0.8 = 0.4$

(b) Montrer que la probabilité que le client prenne un café est égale à $0,76$.

Solution :
On cherche $P(C)$. On se place sur la partition M, T et P. On peut alors utiliser la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(M \cap C) + P(T \cap C) + P(P \cap C) \\ &= P(M) \times P_M(C) + P(T) \times P_T(C) + P(P) \times P_P(C) \\ &= 0.5 \times 0.8 + 0.3 \times 0.6 + 0.2 \times 0.9 \\ &= 0.76 \end{aligned}$$

3. Un assortiment de macarons est vendu 6 euros, une part de tarte tatin est vendue 8 euros et un café est vendu 2 euros.

Chaque client prend un plat, et un seul, au prix unique de 18 euros et ne prend pas plus d'un dessert ni plus d'un café.
Soit X la variable aléatoire égale à la somme totale dépensée par le client.

(a) Déterminer les différentes valeurs de la variable X .

Solution :

Les valeurs de la variable aléatoire sont :

- 18 : si le client ne prend pas de dessert ni de café (soit l'événement $P \cap \overline{C}$, avec une probabilité $P \cap \overline{C} = 0.2 \times 0.1 = 0.02$.
- $18 + 2 = 20$: si le client ne prend que le café(soit l'événement $P \cap C$, avec une probabilité : $P(P \cap C) = 0.2 \times 0.9 = 0.18$.
- $18 + 6 = 24$: si le client prend les macarons, sans café(soit l'événement $M \cap \overline{C}$, avec une probabilité : $P(M \cap \overline{C}) = 0.5 \times 0.2 = 0.1$.
- $18 + 8 = 18 + 2 + 6 = 26$: si le client prend les macarons et un café, ou la tatin sans café (soit l'événement $(M \cap C) \cup (T \cap \overline{C})$, avec une probabilité : $P\left((M \cap C) \cup (T \cap \overline{C})\right) = 0.5 \times 0.8 + 0.3 \times 0.4 = 0.52$.
- $18 + 8 + 2 = 28$: si le client prend la tatin et un café (soit l'événement $(T \cap C)$, avec une probabilité : $P\left((T \cap C)\right) = 0.3 \times 0.6 = 0.18$.

(b) Déterminer la loi de probabilité de X .

Solution :

On obtient la loi suivante :

k	18	20	24	26	28
$P(X = k)$	0.02	0.18	0.1	0.52	0.18

(c) Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

Solution :

On a :

$$E(X) = 18 \times 0.02 + 20 \times 0.18 + 24 \times 0.1 + 26 \times 0.52 + 28 \times 0.18 = 24.92$$

Donc le restaurant peux espérer avoir en moyenne une dépense de chaque client de 24.32