Fiche 5

Exercices sur les variables aléatoires

Exercice 1 : On considère l'expérience aléatoire suivante :
Une première urne contient cinq boules numérotées 0, 2, 4, 6, 8.
Une deuxième urne contient cinq boules numérotées 1, 2, 3, 4, 5.
On appelle "partie" le fait de tirer au hasard une boule de la première urne, puis une boule de la deuxième. Une partie a donc 25 résultats possibles supposés équiprobables.

1. a Compléter le tableau donnant la somme des deux nombres obtenus pour chacun des résultats possibles.

+	0	2	4	6	8
1					
2					
3					
4					
5					

   b Quelle est la probabilité d'obtenir pour une partie une somme égale à 7 ?

   c Quelle est la probabilité d'obtenir pour une partie une somme paire ?

   d Quelle est la probabilité d'obtenir pour une partie une somme au plus égale à 6 ?

2. On considère le jeu suivant associé à chaque partie. Un joueur gagne :
   10 € si la somme est paire,
   30 € si la somme est 1, 3, ou 5,
   et ne gagne rien dans les autres cas.
   On appelle X la variable aléatoire qui à chaque partie associe son gain en euros.

   a Calculer la probabilité de gagner 30 €.

   b Donner sous forme de tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   c Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

   d L'organisateur demande 6 € pour obtenir le droit de jouer. Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 2 : On joue au jeu de " pile ou face " avec trois pièces : une de 0.5 €, une de 1 € et l'autre de 2 €.
Une partie consiste à lancer simultanément les 3 pièces. On notera les résultats par des triplets (exemple : on notera (P,P,F) le fait d'obtenir le résultats :

- pile pour la pièce de 0,5 €.
- pile pour la pièce de 1 €.
- face pour la pièce de 2 €

1. A l'aide d'un arbre, écrire tous les événements élémentaires possibles.

2. Calculer les probabilités des événements suivants :
   - A : " Face apparaît deux fois de suite exactement. "
   - B : " Face apparaît deux fois exactement. "

- C : " Face apparaît au moins deux fois. "
- D : " Face apparaît deux fois au plus. "

3. On considère le jeu suivant : si pile apparaît, on gagne le montant de la valeur de la pièce et si c'est face, on le perd.
   On appelle X la variable aléatoire qui à chaque partie associe son gain en euros.
   (a) Donner sous forme de tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. Conclure.

Exercice 3 : Une urne contient n boules blanches (n entier non nul), deux boules noires et trois boules rouges. On extrait au hasard une boule de l'urne, on regarde sa couleur, puis on la replace dans l'urne. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. (a) Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_1 d'obtenir une boule blanche, la probabilité p_2 d'obtenir une boule noire, la probabilité p_3 d'obtenir une boule rouge.
   (b) Déterminer n pour que la probabilité p_2 soit égale à $\frac{2}{11}$.
   (c) Déterminer n pour que la probabilité p_2 soit égale à $\frac{1}{5}$.
2. On suppose dans cette question que $n = 5$.
   On définit une variable aléatoire X en associant à chaque couleur un nombre de points comme suit :

Couleur de la boule	Nombre de points
Noir	7
Rouge	2
Blanche	3

   (a) Définir la loi de probabilité de X.
   (b) Calculer l'espérance mathématique.

Exercice 4 : Le coût de production d'un objet est de 950 €. Cet objet peut présenter un défaut A, un défaut B, ou bien en même temps le défaut A et le défaut B. La garantie permet de faire des réparations aux frais du fabricant avec les coûts suivants :
100 euros pour le défaut A et 150 euros pour le défaut B. On admet que 90% des objets produits n'ont aucun défaut, 5% ont au moins le défaut A, et 4% ont les deux défauts A et B.

1. A l'aide d'un tableau, déterminer la proportion des objets ayant au moins le défaut B.
2. On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard, associe son prix de revient réel. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de cette variable aléatoire. Interpréter le résultat.
4. On admet que tous les objets produits sont vendus.
   (a) L'usine peut-elle espérer réaliser des bénéfices en vendant 960 € chaque objet vendu ?

(b) L'usine veut réaliser un bénéfice moyen de 100 € par objet. Expliquer comment doit-on alors choisir le prix de vente de l'objet produit.

Exercice 5 : Une urne contient une boule rouge et n boules blanches. On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne.

1. Exprimer en fonction de n la probabilité des événements suivants :
   - M : " Les deux boules sont de la même couleur ".
   - N : " Les deux boules sont de couleur différente ".
2. On considère le jeu suivant : le joueur perd $(n+1)^2$ euros si M est réalisé et gagne $2(n+1)^2$ euros sinon. On appelle X la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) du joueur.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de$X$.
   (b) Démontrer que $E(X) = -n^2 + 4n - 1$.
   (c) Pour quelles valeurs de n le jeu est favorable au joueur ?
   (d) Si on laisse choisir au joueur le nombre de boules blanches, que doit-il répondre ?

Exercice 6 : Une urne contient 5 boules rouges et $n-5$ boules noires.

1. Un joueur tire au hasard, successivement et avec remise, deux boules de l'urne.
   (a) Dresser un arbre pondéré représentant la situation.
   (b) On note A l'événement " les deux boules sont de couleurs différentes ". Calculer $p(n) = P(A)$ en fonction de n.
   (c) Déterminer pour quelle valeur de n , $p(n)$ est maximale.
2. Un joueur tire au hasard successivement et sans remise, deux boules de l'urne.
   (a) Dresser un arbre pondéré représentant la situation.
   (b) Déterminer la probabilité $q(n) = P(A)$.
   (c) Le joueur gagne 2 € s'il réalise A et perd 1 € dans le cas contraire. On note X le gain algébrique du joueur.
   Donner la loi de probabilité de X. Montrer que $E(X) = \dfrac{-n^2+31n-150}{n^2-n}$.
   Déterminer la composition de l'urne pour que le jeu soit équitable.