Fiche 4 ++

Étude d'une fonction

Exercice 1 : Déterminer le tableau de variation des fonctions définies sur D par :

1. $f_1(x) = 7x^2 - 3x + 1$ sur $D = \mathbb{R}$.
2. $f_2(x) = 4x^3 - 3x^2 - 90x + 3$ sur $D = \mathbb{R}$.
3. $f_3(x) = \dfrac{5x}{x^2+4}$ sur $D = \mathbb{R}$.

Exercice 2 : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (3x^2 - 5x - 2)(2x - 4)$$

1. Justifier que la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'expression de la dérivée de f.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente en $a = 1$.
4. Justifier que la tangente en 2 est l'axe des abscisses.

Exercice 3 : On considère la fonction définie sur $I = [2, 5]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 8}{x - 1}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthogonal.

1. Justifier que la fonction f est dérivable sur I.
2. On pose $p(x) = x^2 - 2x - 3$.Montrer que l'on a :
$$\forall x \in I, f'(x) = \frac{p(x)}{(x-1)^2}$$
3. Étudier le signe du polynôme $p(x) = x^2 - 2x - 3$ sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire le tableau de variation de f sur I.
5. En quel point la tangente à $\mathscr{C}$ est-elle horizontale ?
6. Déterminer les équations de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2, et au point d'abscisse 5.
7. Tracer ces tangentes puis la courbe $\mathscr{C}$.

Fiche 4 ++
Correction

Exercice 1 : Déterminer le tableau de variation des fonctions définies sur D par :

1. $f_1(x) = 7x^2 - 3x + 1$ sur $D = \mathbb{R}$.

Solution :

La fonction f_1 est dérivable sur D car c'est un polynôme, et, $\forall x \in D$ on a :
$f_1'(x) = 14x - 3$
On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$\frac{3}{14}$		$+\infty$
$14x-3$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{14}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. $f_2(x) = 4x^3 - 3x^2 - 90x + 3$ sur $D = \mathbb{R}$.

Solution :

La fonction f_2 est dérivable sur D car c'est un polynôme, et, $\forall x \in D$ on a :
$f_2'(x) = 12x^2 - 6x - 90$
Pour l'étude du signe, on calcule le déterminant : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 12 \times (-90) = 4356$.
$\Delta > 0$, il y a donc deux racines réelles : $x_1 = 3$ et $x_2 = -\frac{5}{2}$. On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\nearrow$	$\frac{587}{4}$	$\searrow$	-186	$\nearrow$	$-\infty$

3. $f_3(x) = \dfrac{5x}{x^2+4}$ sur $D = \mathbb{R}$.

Solution :

La fonction f_3 est dérivable sur D car c'est un quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas sur D, et, $\forall x \in D$ on a :

$f_3'(x) = \dfrac{5(x^2+4) - 5x \times 2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{-5(x^2-4)}{(x^2+4)^2} = \dfrac{-5(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2}$

Pour l'étude du signe du numérateur, on dispose de deux racines réelles : $x_1 = 2$ et $x_2 = -2$. On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	↘	$-\dfrac{5}{4}$	↗	$\dfrac{5}{4}$	↘	0

Exercice 2 : (6 points)

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (3x^2 - 5x - 2)(2x - 4)$$

1. Justifier que la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Solution :

La fonction f est le produit de deux fonctions polynômiales dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer l'expression de la dérivée de f.

Solution :

On a, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (6x-5)(2x-4) + 2(3x^2-5x-2) \\ &= 12x^2 - 24x - 10x + 20 + 6x^2 - 10x - 4 \\ &= 18x^2 - 44x + 16 \end{aligned}$$

3. Déterminer l'équation réduite de la tangente en $a = 1$.

Solution :

On a : $f(1) = (3-5-2)(2-4) = 8$ et $f'(1) = 18 - 44 + 16 = -10$.
Donc l'équation de la tangente est donnée par la formule :
$T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$ soit ici $T_1 : y = -10(x-1) + 8$ soit $T_1 : y = -10x + 18$.

4. Justifier que la tangente en 2 est l'axe des abscisses.

Solution :

On a : $f(2) = (3 \times 4 - 5 \times 2 - 2)(2 \times 2 - 4) = 0$ et $f'(2) = 18 \times 4 - 44 \times 2 + 16 = 0$.
La tangente est donc horizontale (car $f'(2) = 0$) et passe par le point de coordonnées $(2, 0)$ (car $f(2) = 0$), c'est donc bien l'axe des abscisses.

Exercice 3 : (10 points)
On considère la fonction définie sur $I = [2, 5]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 8}{x - 1}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthogonal.

1. Justifier que la fonction f est dérivable sur I.

Solution :

Posons $u : x \mapsto x^2 - 5x + 8$ et $v : x \mapsto x - 1$. La fonction v est dérivable et non nulle sur I car elle s'annule en 1 et $1 \notin I$.
De plus la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Donc la fonction f est dérivable sur I.

2. On pose $p(x) = x^2 - 2x - 3$.Montrer que l'on a :

$$\forall x \in I, f'(x) = \frac{p(x)}{(x - 1)^2}$$

Solution :

$\forall x \in I$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'v - v'u}{v^2} \\
&= \frac{(2x - 5)(x - 1) - 1(x^2 - 5x + 8)}{(x - 1)^2} \\
&= \frac{2x^2 - 7x + 5 - x^2 + 5x - 8}{(x - 1)^2} \\
&= \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} \\
&= \frac{p(x)}{(x - 1)^2}
\end{aligned}$$

3. Étudier le signe du polynôme $p(x) = x^2 - 2x - 3$ sur $\mathbb{R}$.

Solution :

On a $\Delta = 4 + 12 = 16$, il y a donc deux racines positives qui sont 3 et -1.
Sachant qu'un trinôme est "du signe de a à l'extérieur des racines" : On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$p(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. En déduire le tableau de variation de f sur I.

Solution :

On obtient le tableau de variation en f sur I intégrant le tableau de signe de la dérivée.

x	2		3		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2

5. En quel point la tangente à $\mathscr{C}$ est-elle horizontale ?

Solution :

La tangente est horizontale si la dérivée s'annule, soit pour $x = 3$: le point B est donc $B(3, 1)$.

6. Déterminer les équations de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2, et au point d'abscisse 5.

Solution :

En 2 : $f(2) = 2$ et $f'(2) = -3$, on a donc $T_2 : y = -3(x-2)+2$ soit $T_2 : y = -3x+8$.
En 5 : $f(5) = 2$ et $f'(5) = \dfrac{3}{4}$, on a donc $T_5 : y = \dfrac{3}{4}(x-5)+2$ soit $T_5 : y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{7}{4}$.

7. Tracer ces tangentes puis la courbe $\mathscr{C}$.

Solution :