Fiche 4

Exercices sur la dérivabilité

Exercice 1 : Déterminer le taux d'accroissement en a des fonctions suivantes, puis déterminer le nombre dérivée en a :

1. $f_1(x) = 5x + 2$ en $a = 3$
2. $f_2(x) = 2x^2 - 3$ en $a = 1$
3. $f_3(x) = \dfrac{2}{x+5}$ en $a = 2$
4. $f_4(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ en $a = 0$

Exercice 2 : Exprimer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = 3x^2 - 2x + 1$
2. $f_2(x) = 7x^3 - 4x + 5$
3. $f_3(x) = 4x - \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{3}$
4. $f_4(x) = 5\sqrt{x} + \dfrac{4}{x^3}$
5. $f_5(x) = 3x^7 - \dfrac{5}{x^7}$
6. $f_6(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{5}$
7. $f_7(x) = \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2}$
8. $f_8(x) = -x^4 - \dfrac{4x^3}{3} - \dfrac{4}{x}$

Exercice 3 : Exprimer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = (2x+3)(x-4)$
2. $f_2(x) = x\sqrt{x}$
3. $f_3(x) = (3 - x^2)(6x^3 - 1)$
4. $f_4(x) = (5x - 4)^2$
5. $f_5(x) = (3x^2 - 1)\sqrt{x}$
6. $f_6(x) = (6x^2 + \sqrt{x})(x - 2\sqrt{x})$

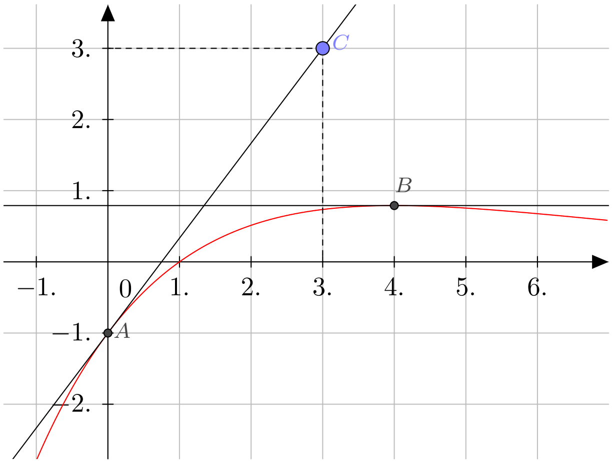
Exercice 4 : Exprimer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{x^3 - 2}$
2. $f_2(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$
3. $f_3(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$
4. $f_4(x) = x^2 - 3 + \dfrac{7}{x^2+3}$
5. $f_5(x) = x + \dfrac{x^2+1}{2x-5}$
6. $f_6(x) = \dfrac{x^4 + 2x^2 - 1}{x+3}$
7. $f_7(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 1}$

Exercice 5 : Exprimer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = (3x - 4)^3$
2. $f_2(x) = 9(-x+1)^2 + (3x+3)^2$
3. $f_3(x) = \sqrt{2x - 4}$
4. $f_3(x) = \dfrac{(5x+3)^2}{\sqrt{5x+3}}$
5. $f_4(x) = \dfrac{9}{(6-7x)^4}$

Exercice 6 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, dont on donne la courbe représentative.
La courbe admet au point $A(0, -1)$ une tangent qui passe par le point $C(3, 3)$.
La courbe admet au point B d'abscisse 4 une tangente horizontale.



Déterminer les valeurs de $f'(0)$ et $f'(4)$.

Exercice 7 : Déterminer l'équation réduite des tangentes au point d'abscisse a pour les fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^5 - 3x + 2$ en $a = 2$.
2. $f_2(x) = \dfrac{3}{2x^2+1}$ en $a = -1$
3. $f_3(x) = \dfrac{5x-1}{2x+3}$ en $a = -1$
4. $f_4(x) = \dfrac{x^2+3}{5-2x^2}$ en $a = 0$

Exercice 8 : Déterminer le tableau de variation des fonctions définies sur D par :

1. $f_1(x) = 3x^2 - 6x + 6$ sur $D = \mathbb{R}$.
2. $f_2(x) = 2x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - x + 3$ sur $D = \mathbb{R}$.
3. $f_3(x) = \dfrac{2x^2+3}{4x-5}$ sur $D = \left]-\infty; \dfrac{5}{4}\right[\cup \left]\dfrac{5}{4}; +\infty\right[$.
4. $f_4(x) = (x^2+3)(x^2+5)$ sur $D = \mathbb{R}$.
5. $f_5(x) = \dfrac{3x^2+4x}{x^2+1}$ sur $D = \mathbb{R}$.
6. $f_6(x) = \dfrac{8x-4}{4x^2+8}$ sur $D = \mathbb{R}$.

Exercice 9 :

Partie I

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 4x^3 - 3x - 8$$

1. Étudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution que l'on note α. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
3. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

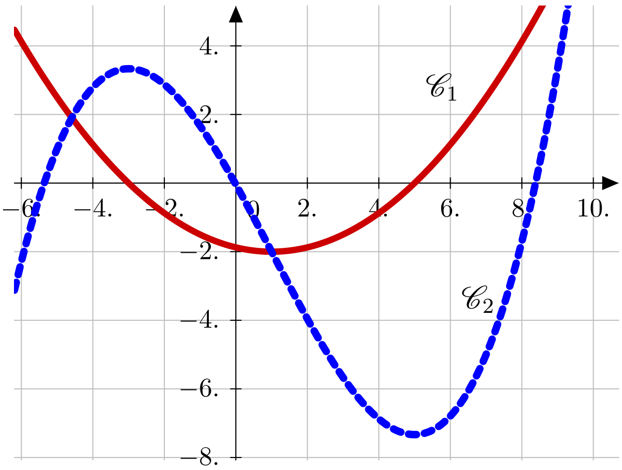
Partie II

On considère la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3+1}{4x^2-1}$$

1. Démontrer que le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $g(x)$ sur $[1;+\infty[$.
2. En déduire le sens de variation de f sur $[1;+\infty[$.

Exercice 10 :



Les courbes ci-dessus représentent deux fonctions, dont l'une est la dérivée de l'autre. Déterminer qu'elle courbe représente la fonction initiale, et quelle courbe représente la dérivée.

Exercice 11 : Une entreprise fabrique et vend une quantité x d'objets. La capacité maximale de production de l'entreprise est de 21 objets. Le coût total de fabrication de x objets, exprimé en euros, est donné par :

$$C(x) = 2x^3 - 54x^2 + 470x + 80$$

Chaque objet est vendu 200 euros.

1. Pour 12 objets fabriqués et vendus calculer :
   - le coût de fabrication ;
   - la recette ;
   - le bénéfice.
2. $R(x)$ et $B(x)$ désignent respectivement la recette et le bénéfice pour x objets vendus.
   (a) Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
   (b) Montrer que le bénéfice pour x objets vendus est :
   $$B(x) = -2x^3 + 54x^2 - 270x - 80$$
   (c) Déterminer la dérivée de la fonction B.
   (d) En déduire le tableau de variation de la fonction B.
   (e) Pour quel nombre d'objets fabriqués et vendus le bénéfice est -il maximum ? Quel est ce bénéfice maximum ?

Exercice 12 :

Monsieur Carotte désire aménager un potager rectangulaire sur son terrain. Le potager doit faire 8 m^2, et doit être clos. Il souhaite que la clôture soit à 0,5 m sur trois coté et à 1,5 m sur le dernier (comme le montre la figure ci-contre).
On note x et y les longueurs du terrain clos.

1. Exprimer la surface du potager en fonction de x et y.

2. En déduire l'expression de y en fonction x.

3. Démontrer que la surface du terrain clos est , pour $x > 2$ donnée par :

$$S(x) = \frac{x^2 + 6x}{x - 2}$$

4. Afin de minimiser les coûts, déterminer la valeur minimale de la surface du terrain clos.

5. Déterminer alors la longueur de clôture nécessaire.