

Fiche 3.1

Exercices sur les sommes

Exercice 1: On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 12$ et de raison $R = -2$.

1. Déterminer les sommes suivantes :

(a) $\sum_{n=0}^7 u_n$

(b) $\sum_{n=0}^{25} u_n$

(c) $\sum_{n=5}^{18} u_n$

2. Déterminer la valeur de n tel que :

$$\sum_{n=2}^n u_n = -220$$

Exercice 2: Un étudiant souhaite louer un appartement pour ses 3 années d'études. Le loyer initial, le 1 septembre 2017, est de 400 euros, son dernier loyer sera le 1 août 2020. (soit un total de 36 mois...) Le propriétaire propose deux augmentations différentes (il faut bien augmenter...) par mois :

- une augmentation de 10 euros tous les mois. (choix noté A)
- une augmentation de 2 % tous les mois. (choix noté B)

Partie I : A l'aide d'un tableur

Dans un même tableau, on construira 5 colonnes :

- une colonne pour les mois (du premier au 36 ième)
- une colonne pour le loyer par mois pour le choix A.
- une colonne pour le cumul du loyer pour le choix A depuis le premier mois.
- une colonne pour le loyer par mois pour le choix B.
- une colonne pour le cumul du loyer pour le choix B depuis le premier mois.

mois	loyer A	Cumul A	loyer B	Cumul B
1	400	400	400	400
2

1. Par lecture du tableau, que se passe-t-il le 24^{ieme} mois ?
2. Par lecture du tableau, que se passe-t-il le 34^{ieme} mois ?
3. A l'aide des résultat du tableau, quel est le choix que l'étudiant doit prendre.

Partie II : A l'aide des suites

On note (a_n) (respectivement (b_n)) la suite correspondant que loyer pour le choix A (respectivement B). Donc a_n (respectivement b_n) est le loyer au mois $n + 1$, ainsi $a_0 = 400$ (respectivement $b_0 = 400$).

On note (A_n) (respectivement (B_n)) la suite correspondant au cumul des loyers pour le choix A (respectivement B) :

$$A_n = \sum_{i=0}^n a_i \text{ et } B_n = \sum_{i=0}^n b_i$$

A. Pour la suite (a_n)

1. Quelle est la nature de la suite (a_n) .
2. Déterminer le loyer au 1^{er} août 2020.
3. Déterminer la somme cumulée jusqu'au 1^{er} août 2020.

B. Pour la suite (b_n)

1. Quelle est la nature de la suite (b_n) .
2. Déterminer le loyer au 1^{er} août 2020.
3. Déterminer la somme cumulée jusqu'au 1^{er} août 2020.

C. Le bon choix

D'après les résultats précédents, quel est le choix que l'étudiant doit prendre.

1 Correction

Exercice 3: On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 12$ et de raison $R = -2$.

1. Déterminer les sommes suivantes :

(a) $\sum_{n=0}^7 u_i$

Solution :

$$\sum_{n=0}^7 u_i = 8 \frac{u_0 + u_7}{2} = 8 \frac{12 + 12 + 7 \times (-2)}{2} = 40$$

(b) $\sum_{n=0}^{25} u_i$

Solution :

$$\sum_{n=0}^{25} u_i = 26 \frac{u_0 + u_{25}}{2} = 26 \frac{12 + 12 + 25 \times (-2)}{2} = -338$$

(c) $\sum_{n=5}^{18} u_i$

Solution :

$$\sum_{n=5}^{18} u_i = (18 - 5 + 1) \frac{u_5 + u_{18}}{2} = 14 \frac{12 + 5 \times (-2) + 12 + 18 \times (-2)}{2} = -154$$

2. Déterminer la valeur de n tel que :

$$\sum_{n=2}^n u_i = -220$$

Solution :

On cherche n tel que :

$$\sum_{n=2}^n u_i = -220 \Leftrightarrow (n - 2 + 1) \frac{u_2 + u_n}{2} = -220$$

$$\Leftrightarrow (n - 1) \frac{12 + 2 \times (-2) + 12 + n \times (-2)}{2} = -220 \quad \text{On résout l'équa-}$$

$$\Leftrightarrow (n - 1)(10 - n) = -220$$

$$\Leftrightarrow -n^2 + 11n + 210 = 0$$

tion du second degré, et on trouve $n = 21$ (car l'autre racine est négative (on trouve (-10)))

Exercice 4: Un étudiant souhaite louer un appartement pour ses 3 années d'études. Le loyer initial, le 1 septembre 2017, est de 400 euros, son dernier loyer sera le 1 août 2020. (soit un total de 36 mois...) Le propriétaire propose deux augmentations différentes (il faut bien augmenter...) par mois :

- une augmentation de 10 euros tous le mois. (choix noté A)
- une augmentation de 2 % tous le mois. (choix noté B)

Partie I : A l'aide d'un tableur

Dans un même tableau, on construira 5 colonnes :

- une colonne pour les mois (du premier au 36 ième)
- une colonne pour le loyer par mois pour le choix A.
- une colonne pour le cumul du loyer pour le choix A depuis le premier mois.
- une colonne pour le loyer par mois pour le choix B.
- une colonne pour le cumul du loyer pour le choix B depuis le premier mois.

mois	loyer A	Cumul A	loyer B	Cumul B
1	400	400	400	400
2

Solution :

mois	Loyer A	Total A	Loyer B	Total B
1	400	400	400,00	400,00
2	410	810	408,00	808,00
3	420	1230	416,16	1224,16
4	430	1660	424,48	1648,64
5	440	2100	432,97	2081,62
6	450	2550	441,63	2523,25
8	470	3480	459,47	3433,19
9	480	3960	468,66	3901,85
10	490	4450	478,04	4379,89
11	500	4950	487,60	4867,49
12	510	5460	497,35	5364,84
13	520	5980	507,30	5872,13
14	530	6510	517,44	6389,58
15	540	7050	527,79	6917,37
16	550	7600	538,35	7455,71
17	560	8160	549,11	8004,83
18	570	8730	560,10	8564,92
19	580	9310	571,30	9136,22
20	590	9900	582,72	9718,95
21	600	10500	594,38	10313,33
22	610	11110	606,27	10919,59
23	620	11730	618,39	11537,99
24	630	12360	630,76	12168,74
25	640	13000	643,37	12812,12
26	650	13650	656,24	13468,36
27	660	14310	669,37	14137,73
28	670	14980	682,75	14820,48
29	680	15660	696,41	15516,89
30	690	16350	710,34	16227,23
31	700	17050	724,54	16951,78
32	710	17760	739,04	17690,81
33	720	18480	753,82	18444,63
34	730	19210	768,89	19213,52
35	740	19950	784,27	19997,79
36	750	20700	799,96	20797,75

1. Par lecture du tableau, que se passe-t-il le 24^{ième} mois ?

Solution :

| A partir du 24^{ième} mois, le loyer B passe au dessus du loyer A.

2. Par lecture du tableau, que se passe-t-il le 34^{ième} mois ?

Solution :

| A partir du 34^{ième} mois, le total des loyers B passe au dessus du total des loyers A.

3. A l'aide des résultat du tableau, quel est le choix que l'étudiant doit prendre.

Solution :

| Sur la totalité des 3 années, la dépense est plus faible sur le loyer A. Donc autant choisir le type A.

Partie II : A l'aide des suites

On note (a_n) (respectivement (b_n)) la suite correspondant que loyer pour le choix A (respectivement B). Donc a_n (respectivement b_n) est le loyer au mois $n + 1$, ainsi $a_0 = 400$ (respectivement $b_0 = 400$).

On note (A_n) (respectivement (B_n)) la suite correspondant au cumul des loyers pour le choix A (respectivement B) :

$$A_n = \sum_{i=0}^n a_i \text{ et } B_n = \sum_{i=0}^n b_i$$

A. Pour la suite (a_n)

1. Quelle est la nature de la suite (a_n) .

Solution :

| Chaque mois, le loyer augmente de 10 euros, donc : $a_{n+1} = a_n + 10$.
La suite (a_n) est donc une suite arithmétique de premier terme $a_0 = 400$ et de raison $R = 10$.

2. Déterminer le loyer au 1^{er} août 2020.

Solution :

| On cherche a_{35} , pour le 36^{ième} mois :
 $a_{35} = a_0 + 35 \times R = 400 + 35 \times 10 = 750$
Le loyer au 1^{er} août 2020 sera donc de 750 euros.

3. Déterminer la somme cumulée jusqu'au 1^{er} août 2020.

Solution :

| On cherche $A_{35} = \sum_{i=0}^{35} a_i$. On a :
 $A_{35} = \sum_{i=0}^{35} a_i = (35 + 1) \frac{a_0 + a_{35}}{2} = 36 \times \frac{400 + 750}{2} = 20700$
La somme cumulée jusqu'au 1^{er} août 2020 sera donc de 20700 euros.

B. Pour la suite (b_n)

1. Quelle est la nature de la suite (b_n) .

Solution :

Chaque mois, le loyer augmente de 2 %, donc : $b_{n+1} = 1,02 \times b_n$.

La suite (b_n) est donc une suite géométrique de premier terme $b_0 = 400$ et de raison $q = 1,02$.

2. Déterminer le loyer au 1^{er} août 2020.

Solution :

On cherche b_{35} , pour le 36^{ième} mois :

$$b_{35} = b_0 \times q^{35} = 400 \times 1,02^{35} = 799,96$$

Le loyer au 1^{er} août 2020 sera donc de 799,96 euros.

3. Déterminer la somme cumulée jusqu'au 1^{er} août 2020.

Solution :

On cherche $B_{35} = \sum_{i=0}^{35} b_i$. On a :

$$B_{35} = \sum_{i=0}^{35} b_i = b_0 \frac{1 - q^{36}}{1 - q} = 400 \times \frac{1 - 1,02^{36}}{1 - 1,02} = 20797,75$$

La somme cumulée jusqu'au 1^{er} août 2020 sera donc de 20797,75 euros.

C. Le bon choix

D'après les résultats précédents, quel est le choix que l'étudiant doit prendre.

Solution :

Sur la totalité des 3 années, la dépense est plus faible sur le loyer A. Donc autant choisir le type A.