Fiche 3 +

Exercices sur les suites

Exercice 1 :

1. On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = -5$ avec $u_8 = 7$.
   Calculer la raison.
2. On considère la suite arithmétique (u_n) de raison $R = \dfrac{4}{3}$ avec $u_{39} = 35$.
   Calculer le premier terme.
3. On considère la suite arithmétique (u_n) avec $u_{10} = 34.$ et $u_{17} = 55$.
   Calculer le premier terme et la raison.

Exercice 2 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $R = -2$ et de premier terme $u_0 = 10$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite.
2. Déterminer u_{18}.
3. Calculer le 25^{ime} terme de la suite.
4. Pour quelle valeur de n a-t-on $u_n = -56$?
5. Pour quelle valeur de n a-t-on :
$$\sum_{i=0}^{n} u_i = -180$$
6. Pour quelle valeur de n a-t-on :
$$\sum_{i=12}^{n} u_i = -558$$

Exercice 3 : On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 - 2u_n} \end{cases}$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite.
2. On suppose que la suite ne s'annule jamais. On pose (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$v_n = \frac{1}{u_n}$$
   Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique.
3. En déduire l'expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.

Exercice 4 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 5 \end{cases}$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite.

2. On pose (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_n - n^2.$$

   a Calculer les 5 premiers termes de la suite (v_n).

   b Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $R = 4$.

3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

4. En déduire que l'on a la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (n+2)^2$$

Exercice 5 : On considère la suite (u_n) définie par la relation :

$$\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & 2u_n + n - 1 \end{cases}$$

Partie I : Algorithme

1. Calculer les 5 premiers terme de la suite (u_n).

2. Écrire, en pseudo-code, puis dans le langage de votre calculatrice, un programme permettant de calculer la valeur de u_n pour un n donné.

3. En déduire la valeur de u_{25}.

Partie II : Une suite auxiliaire
On définie la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + n$$

1. Calculer les 5 premiers terme de la suite v_n.

2. Faire une conjecture sur la nature de la suite (v_n).

3. Prouver cette conjecture.

4. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

5. En déduire l'expression de u_n.

6. Retrouver la valeur de u_{25}.

Fiche 3+

Correction

Exercice 1 :

1. On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = -5$ avec $u_8 = 7$.
   Calculer la raison.

Solution :

On a :
$u_8 = 7 \Leftrightarrow u_0 + 8R = 7 \Leftrightarrow -5 + 8R = 7 \Leftrightarrow R = \dfrac{3}{2}$
La raison est donc $R = \dfrac{3}{2}$

2. On considère la suite arithmétique (u_n) de raison $R = \dfrac{4}{3}$ avec $u_{39} = 35$.
   Calculer le premier terme.

Solution :

On a :
$u_{39} = 35 \Leftrightarrow u_0 + 39R = 35 \Leftrightarrow u_0 + 39 \times \dfrac{4}{3} = 35 \Leftrightarrow u_0 = -17$
Le premier terme est donc $u_0 = -17$

3. On considère la suite arithmétique (u_n) avec $u_{10} = 34.$ et $u_{17} = 55$.
   Calculer le premier terme et la raison.

Solution :

On a :
$$\begin{cases} u_{10} & = & 34 & (L_1) \\ u_{17} & = & 55 & (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 + 10R & = & 34 & (L_1) \\ u_0 + 17R & = & 55 & (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} u_0 + 10R & = & 34 & (L_1) \\ 7R & = & 21 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 + 10 \times 3 & = & 34 & (L_1) \\ R & = & 3 & (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} u_0 & = & 4 & (L_1) \\ R & = & 3 & (L_2) \end{cases}$$ Le premier terme est donc $u_0 = 4$ et la raison est $R = 3$.

Exercice 2 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $R = -2$ et de premier terme $u_0 = 10$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite.

Solution :

$u_0 = 10$, $u_1 = 8$, $u_2 = 6$, $u_3 = 4$, $u_2 = 2$.

2. Déterminer u_{18}.

Solution :
$u_{18} = u_0 + 18 \times R = -26$

3. Calculer le 25^{ime} terme de la suite.

Solution :
$u_{24} = u_0 + 24 \times R = -38$

4. Pour quelle valeur de n a-t-on $u_n = -56$?

Solution :
$u_n = -56 \Leftrightarrow u_0 + nR = -56 \Leftrightarrow n = 33$

5. Pour quelle valeur de n a-t-on :

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = -180$$

Solution :
On trouve $n = 19$

6. Pour quelle valeur de n a-t-on :

$$\sum_{i=12}^{n} u_i = -558$$

Solution :
On trouve $n = 29$

Exercice 3 : On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 - 2u_n} \end{array} \right.$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite.

Solution :
$u_0 = 3$, $u_1 = -\dfrac{3}{5}$, $u_2 = -\dfrac{3}{11}$, $u_3 = -\dfrac{3}{17}$, $u_4 = -\dfrac{3}{23}$

2. On suppose que la suite ne s'annule jamais. On pose (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = \frac{1}{u_n}$$

Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique.

Solution :

$v_{n+1} - v_n = -2$ s.a de raison -2 et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{3}$

3. En déduire l'expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.

Solution :

On trouve $v_n = \dfrac{1}{3} - 2n$ et $u_n = \dfrac{3}{1-6n}$

Exercice 4 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 5 \end{cases}$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite.

Solution :

On a : $u_0 = 4$, $u_1 = u_0 + 2\times 0 + 5 = 9$, $u_2 = u_1 + 2\times 1 + 5 = 16$, $u_3 = u_2 + 2\times 2 + 5 = 25$, $u_4 = u_3 + 2\times 3 + 5 = 36$.

2. On pose (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_n - n^2.$$

a Calculer les 5 premiers termes de la suite (v_n).

Solution :

On a : $v_0 = u_0 - 0^2 = 4$, $v_1 = u_1 - 1^2 = 8$, $v_2 = u_2 - 2^2 = 12$, $v_3 = u_3 - 3^2 = 16$, $v_4 = u_4 - 4^2 = 20$.

b Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $R = 4$.

Solution :

On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - (n+1)^2 - (u_n - n^2) \\ &= u_n + 2n + 5 - n^2 - 2n - 1 - u_n + n^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

On a donc bien prouvé que la suite (v_n) est arithmétique de raison 4, et de premier terme 4.

3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

Solution :

Sachant que la suite est arithmétique, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$
$v_n = v_0 + n \times R = 4 + 4n$

4. En déduire que l'on a la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (n+2)^2$$

Solution :

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$
$v_n = u_n - n^2 \Leftrightarrow u_n = v_n + n^2 \Leftrightarrow u_n = 4n + 4 + n^2 \Leftrightarrow u_n = (n+2)^2$

Exercice 5 : On considère la suite (u_n) définie par la relation :

$$\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & 2u_n + n - 1 \end{cases}$$

Partie I : Algorithme

1. Calculer les 5 premiers terme de la suite (u_n).

Solution :

On a : $u_0 = 2$, $u_1 = 2u_0 + 0 - 1 = 3$, $u_2 = 2u_1 + 1 - 1 = 6$, $u_3 = 2u_2 + 2 - 1 = 13$, $u_4 = 2u_3 + 3 - 1 = 28$.

2. Écrire, en pseudo-code, puis dans le langage de votre calculatrice, un programme permettant de calculer la valeur de u_n pour un n donné.
3. En déduire la valeur de u_{25}.

Solution :

On trouve $u_{25} = 67\ 108\ 839$

Partie II : Une suite auxiliaire
On définie la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + n$$

1. Calculer les 5 premiers terme de la suite v_n.

Solution :

On a : $v_0 = u_0 + 0 = 2$, $v_1 = u_1 + 1 = 4$, $v_2 = u_2 + 2 = 8$, $v_3 = u_3 + 3 = 16$, $v_4 = u_4 + 4 = 32$.

2. Faire une conjecture sur la nature de la suite (v_n).

Solution :

La suite semble être géométrique de raison 2. (car $v_1 = 2v_0$,...)

3. Prouver cette conjecture.

Solution :

On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + n + 1 \\ &= 2u_n + n - 1 + n + 1 \\ &= 2u_n + 2n \\ &= 2(u_n + n) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

On a donc bien prouvé que la suite est géométrique de raison 2, et de premier terme 2.

4. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

Solution :

Sachant que la suite est géométrique, on a donc :

$$v_n = v_0 \times q^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

5. En déduire l'expression de u_n.

Solution :

$v_n = u_n + n \Leftrightarrow u_n = v_n - n \Leftrightarrow u_n = 2^{n+1} - n$

6. Retrouver la valeur de u_{25}.

Solution :

$u_{25} = 2^{25+1} - 25 = 67\ 108\ 839$