Fiche 3

Exercices sur les suites

Exercice 1 : Calculer les cinq premiers termes des suites suivantes :

1. La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = 2n^2 + n - 3$
2. La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{1}{n}$
3. La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$
4. La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n - 1} \end{cases}$
5. La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2n - 5 \end{cases}$
6. La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$

Exercice 2 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$.
Écrire un algorithme pour calculer la valeur de u_n , pour un n donné en argument.
En déduire la valeur de u_{12}.

Exercice 3 : La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_1 = 0 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n + 1 \end{cases}$
Ecrire un algorithme pour calculer la valeur de u_n , pour un n donné en argument.
En déduire la valeur de u_{12}.

Exercice 4 : Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 3n^2 - 2$.
Montrer que la suite est croissante.

Exercice 5 : Soit (u_n) la suite définie par $u_n = -2n^2 + n + 5$.
Montrer que la suite est décroissante.

Exercice 6 : Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{3}{n+5}$.
Étudier les variations de la suite (u_n).

Exercice 7 : Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 & \text{si } n = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 3 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. On pose $p(x) = x^2 - 3x + 3$. Déterminer le signe de $p(x)$, pour x réel.
2. En déduire les variations de la suite (u_n).

Exercice 8 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $R = 3$ et de premier terme $u_0 = 12$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite.
2. Déterminer u_{18}.
3. Calculer le 20^{ime} terme de la suite.
4. Pour quelle valeur de n a-t-on $u_n = 87$?

Exercice 9 :

1. On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = -5$ avec $u_4 = -13$. Calculer la raison de la suite.
2. On considère la suite arithmétique (u_n) de raison $R = -5$ avec $u_7 = 24$. Calculer le premier terme de la suite.
3. On considère la suite arithmétique (u_n) avec $u_{12} = 25$ et $u_{18} = 34$. Calculer la raison et le premier terme de la suite.

Exercice 10 : On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2u_n + 1} \end{cases}$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite.
2. On suppose que la suite ne s'annule jamais. On pose (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$v_n = \frac{1}{u_n}.$$
Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique.
3. En déduire l'expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.

Exercice 11 :

1. On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = -5$ avec $u_2 = -\dfrac{5}{4}$. Calculer la raison de la suite.
2. On considère la suite géométrique (u_n) de raison $q = \dfrac{1}{2}$ avec $u_8 = 40$. Calculer le premier terme de la suite.
3. On considère la suite géométrique (u_n) avec $u_2 = 2$ et $u_6 = 162$. Calculer la raison et le premier terme de la suite.

Exercice 12 : Déterminer si les suites suivantes sont arithmétiques, géométriques ou aucun des deux.

1. La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = 6 - 5(n+2)$
2. La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = n^2 + 1$
3. La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = -3^{2n+3}$
4. La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{5^{n+2}}{3^{n-1}}$

Exercice 13 : On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{array} \right.$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite.
2. On note $d : y = 3x - 2$ et $\Delta : y = x$. On nomme U_n le point de cordonnées $(u_n, 0)$. A l'aide des droites d et Δ, construire les points : U_0 , U_1 , U_2 et U_3.
3. On pose (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_n - 1.$$

   Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
4. En déduire l'expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.

Exercice 14 : (Sujet Bac ES Liban 2014)
La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2013 et a enregistré 2500 inscriptions en 2013.

Elle estime que, chaque année, 80 % des anciens inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents.

On modélise cette situation par une suite numérique (a_n).

On note $a_0 = 2500$ le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2013 et a_n représente le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année $2013 + n$.

1. (a) Calculer a_1 et a_2.
   (b) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a la relation $a_{n+1} = 0,8 \times a_n + 400$.
2. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = a_n - 2000$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 500$ et de raison $q = 0,8$.
   (b) En déduire que le terme général de la suite (a_n) est $a_n = 500 \times 0,8^n + 2000$.
   (c) Calculer la limite de la suite (a_n).
   (d) Que peut-on en déduire pour le nombre d'adhérents à la médiathèque si le schéma d'inscription reste le même au cours des années à venir ?
3. On propose l'algorithme suivant :

Variables :	N entier
	A réel
Initialisation :	N prend la valeur 0
	A prend la valeur 2500
Traitement :	Tant que $A - 2000 > 50$
	A prend la valeur $A \times 0,8 + 400$
	N prend la valeur $N + 1$
	Fin du Tant que
Sortie :	Afficher N.

(a) Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.

(b) À l'aide de la calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme et interpréter la réponse dans le contexte de l'exercice.

Exercice 15 : Le baril est l'unité de mesure utilisée pour mesurer les quantités de pétrole brut produites. Un baril équivaut à environ 159 litres.

Compte tenu de la hausse de la consommation mondiale en pétrole, une compagnie pétrolière décide de faire passer sa production mensuelle de 178000 barils à 237000 barils en deux ans. Deux possibilités sont alors envisagées :

- option 1 : augmenter la production de 2459 barils tous les mois.
- option 2 : augmenter de 1,2 % la production chaque mois.

1. **Étude de l'option 1**

   On note u_0 la production mensuelle initiale de 178000 barils et u_n (pour $n \geqslant 1$) la production en barils n mois plus tard avec l'option 1. On a : $u_0 = 178000$.

   (a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Donner sa raison.

   (b) Exprimer u_n en fonction de n.

   (c) Calculer u_{24} afin de vérifier que l'objectif de la compagnie pétrolière est atteint.

2. **Étude de l'option 2**

   On note v_0 la production mensuelle initiale de 178000 barils et v_n (pour $n \geqslant 1$) la production en barils n mois plus tard avec l'option 2. On a : $v_0 = 178000$.

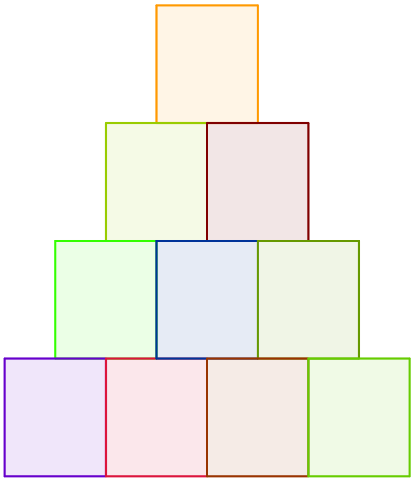
   (a) Calculer v_1.

   (b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Donner sa raison.

   (c) Exprimer v_n en fonction de n.

   (d) À l'aide de cette formule, calculer la production mensuelle au bout de deux ans (on donnera le résultat arrondi à l'unité). L'objectif de la compagnie pétrolière est-il atteint ?

Exercice 16 : On souhaite construire une pyramide de boites de conserve de plusieurs étages. L'étage supérieur doit contenir qu'une boite, et chaque niveau possède une boite de plus que le niveau au dessus de lui :



1. Déterminer le nombre de boite nécessaire pour faire une pyramide de 10 étages.
2. Déterminer le nombre de boite nécessaire pour faire une pyramide de 100 étages.
3. Déterminer le nombre d'étage que l'on peut obtenir si nous disposons de 120 boites.
4. Un stand de fête foraine désire faire 3 pyramides identiques, mais ne dispose que de 250 boites. Quelle est la hauteur maximale des pyramides. Combien de boites ne sont pas utilisées ? Combien de boites faut-il récoltées en plus pour faire un étage supplémentaire ?
5. On désire maintenant que l'étage supérieur possède 50 boites, les autres étages restent construits comme précédemment. Déterminer le nombre de boite nécessaire pour faire une pyramide tronquée de 20 étages.

Exercice 17 : Un utilisateur de réseaux sociaux cherche à connaitre la rapidité d'extension que peut prendre une rumeur sur la toile. Il part des principes suivants :

- Ses contacts ne se connaissent pas, ni les contacts de ses contacts, etc...
- Quand un contact est au courant de la rumeur, il la transmet à deux autres contacts le jour suivant, et passe à autre chose.

1. Le 1er septembre, l'utilisateur envoie une rumeur à un contact. Combien de contacts sont au courant le 4 septembre ?
2. Notons u_n le nombre de contacts apprenant la rumeur le $(1+n)^{\text{ième}}$ septembre. (donc u_0 correspond au nombre contacts apprenant la rumeur de 1^{er} septembre, soit 1.)
   Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
3. En déduire le nombre total de contacts ayant vent de la rumeur le $(1+n)^{\text{ième}}$ septembre.
4. La population française est de 66 317 994 au 1 janvier 2015 (source INSEE), en utilisant la calculatrice, déterminer quel est le jour où le nombre de contacts dépassera le population française.