Fiche 1

Second degré

Exercice 1 : Développer, réduire et ordonner :

(a) $p_1(x) = 3(2x+1) - 2(6x-4)$

(b) $p_2(x) = 3(5-4x) + 2x(7x-1)$

(c) $p_3(x) = (x+4)(8-4x) - 7(2x+1)(4-3x)$

(d) $p_4(x) = -(x-5)(x-4)(x+1)$

Exercice 2 : Factoriser les expressions suivantes sous la forme de produits de formes affines :

(a) $p_1(x) = 9x^2 - 3x$

(b) $p_2(x) = 5x(3+2x) - 3x(x+2)$

(c) $p_3(x) = (x+1)(5-2x) - (x+1)(3x+1)$

(d) $p_4(x) = (2-x)(3x+9) + (x+3)(3x-7)$

Exercice 3 : Développer, réduire et ordonner :

(a) $p_1(x) = (x+1)^2 - 1$

(b) $p_2(x) = 3(x-4)^2 - 8$

(c) $p_3(x) = 2(x+4)^2 - 7$

(d) $p_4(x) = -(x-5)^2 + 3$

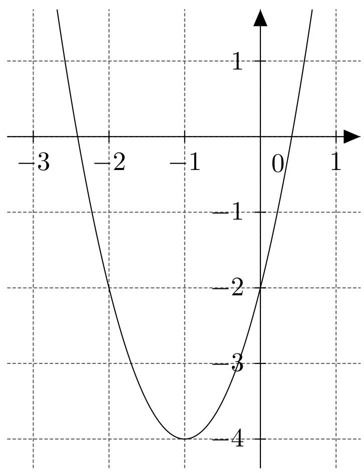
Exercice 4 : On considère le polynôme suivant :

$$p(x) = x^2 - 6x + 11$$

1. Montrer que l'on a, pour tout réel x : $p(x) = (x-3)^2 + 2$
2. Justifier que, pour tout réel x, le trinôme est toujours positif.
3. Donner le minimum du polynôme. En quelle valeur est-il atteint ?

Exercice 5 :

On donne la courbe du polynôme p : Trouver la forme canonique de p. En déduire sa forme développée.



Exercice 6 : Déterminer la forme canonique des trinômes suivants :

(a) $p_1(x) = x^2 - 2x + 4$

(b) $p_2(x) = x^2 + 5x - 3$

(c) $p_3(x) = 2x^2 - 8x - 1$

(d) $p_4(x) = 3x^2 - x + 2$

Exercice 7 : Résoudre les équations suivantes :

(a) $x^2 - 3x + 2 = 0$

(b) $x^2 + x - 20 = 0$

(c) $3x^2 - 4x - 32 = 0$

(d) $6x^2 = x + 1$

(e) $3x^2 - 1 = 0$

(f) $-3x^2 + 2x = 0$

(g) $4x(x-1) = -1$

(h) $3x^2 + 2x + 4 = 0$

(i) $x(x+1) + 3 = x - 4$

Exercice 8 : Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $2x^2 - 5x - 3 \geq 0$

(b) $3x^2 + 2x - 8 < 0$

(c) $-10x^2 - 47x - 9 > 0$

(d) $4x^2 \geq 2x - 1$

(e) $-2x^2 + \frac{1}{2}x - 3 > 0$

(f) $\frac{x^2+9}{3} \leq 2x$

(g) $4x \leq 4x^2 + 1$

(h) $8x(2x-1) > -1$

Exercice 9 : Soit m un réel. On considère l'équation (E_m) suivante :

$$(E_m)\ x^2 + mx + m = 0$$

1. Résoudre les équations suivantes : (E_0) ; (E_1) ; (E_{-1}) .
2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation (E_m) admet une unique solution.
3. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation (E_m) admet deux solutions distinctes.
4. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation (E_m) n'admet aucune solution réelle.

Exercice 10 : Soit m un réel. On pose $a = -1$. On considère l'équation (E_m) suivante :

$$(E_m)\ x^2 + (m+1)x + m = 0$$

1. Montrer que pour tout réel m, a est une solution de (E_m) .
2. Justifier que (E_m) a toujours au moins une solution.
3. Déterminer la valeur de m pour que a soit l'unique solution de (E_m) .
4. Déterminer les solutions de (E_m) dans les autres cas.

Exercice 11 : Soit b et c deux réels fixés. On considère le polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

1. Déterminer les réels b et c tels que le polynôme admette 1 et 2 comme racines.
2. Déterminer les réels b et c tels que le polynôme admette 3 et -2 comme racines.
3. Déterminer les réels b et c tels que le polynôme admette uniquement -4 comme racine.

Exercice 12 : Déterminer les valeurs de a et b telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 5x^2 - 2x + 3 = (a+b)x^2 + bx + 3$$

Exercice 13 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -30x^3 - 97x^2 + 34x + 21$$

1. Montrer que $-\dfrac{1}{3}$ est une racine de f.
2. On cherche à factoriser le polynôme f sous la forme

$$f(x) = (3x+1)\left(ax^2 + bx + c\right)$$

   (a) Montrer que l'on a, pour tout x réel :

$$(3x+1)\left(ax^2 + bx + c\right) = 3ax^3 + (a+3b)x^2 + (b+3c)x + c$$

   (b) En déduire les valeurs de a, b et c telles que, pour tout réel x, on ait :

$$f(x) = (3x+1)\left(ax^2 + bx + c\right)$$

3. Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 0$

Exercice 14 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

1. Déterminer une racine évidente de f.
2. Factoriser le polynôme.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 15 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 - x^3 - 19x^2 - 21x$$

1. Déterminer une racine évidente de f.
2. Montrer que (-3) est aussi une racine de f.
3. Déterminer les valeurs de a, b et c telles que, pour tout réel x, on ait :

$$f(x) = x(x+3)\left(ax^2 + bx + c\right)$$

4. Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.