Chapitre 1

Le polynôme du second degré

Table des matières

1 Définition :

Définition 1 :

On dira que la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ est un trinôme si elle admettant une écriture polynômiale soit :

$$\exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ ,\ \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ P(x) = ax^2 + bx + c$$

Exemple 1 :

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ est un trinôme, on identifie les coefficients par : $a = 3$, $b = -2$, $c = 5$.
- La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 2$ est un trinôme, on identifie les coefficients par : $a = -1$, $b = 0$, $c = 2$.
- La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 8x + 7$ n'est pas un trinôme, il s'agit d'une fonction affine.

Exercice 1 : Pour les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, déterminer la forme polynomiale et identifier les coefficients a, b et c :

1. $f_1(x) = x(x+1) + 2$
2. $f_2(x) = (2x+5)^2$
3. $f_3(x) = (3x+4)(5-x)$
4. $f_4(x) = (2x-3)(2x+3)$
5. $f_5(x) = (4x+1)(x-4) + 3(5x+2) - 2$
6. $f_6(x) = (x-1)^2 + (x+1)^2$

2 Forme canonique :

Définition 2 :

Soit P un trinôme. On appelle forme canonique de P, l'écriture de P :

$$\exists(a,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ ,\ \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ P(x) = a\left(x - \alpha\right)^2 + \beta$$

Propriété 1 :

Soit P le trinôme définie par $P(x) = ax^2 + bx + c$, (avec a non nul). La forme canonique de P est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

Dans la suite on pose $\Delta = b^2 - 4ac$ (appelé discriminant de P).

Exemple 2 :

Soit $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$, la forme canonique de P est :

$$P(x) = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{12}$$

Exemple 3 :

Une deuxième méthode consiste à faire apparaître une identité remarquable, en constatant l'égalité suivante, où a est un réel quelconque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2ax = (x+a)^2 - a^2$$

Pour le polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$, on a :
$\forall x \in \mathbb{R}$;

$$\begin{array}{rcl} P(x) & = & 3x^2 - 5x + 2 \\ & = & 3\left(x^2 - \frac{5}{3}x\right) + 2 \\ & = & 3\left(\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right) + 2 \\ & = & 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{12} \end{array}$$

Exercice 2 : Déterminer la forme canonique des fonctions trinômes suivantes :

1. $f_1(x) = x^2 + 4x + 7$
2. $f_2(x) = x^2 + x + 3$
3. $f_3(x) = x^2 - 6x + 9$
4. $f_4(x) = 2x^2 + 4x - 5$
5. $f_5(x) = x^2 - 5x + 4$
6. $f_6(x) = 3x^2 + x$

3 Équation du second degré :

Propriété 2 :

On considère le polynôme

$$P(x) = ax^2 + bx + c \text{ (où } a \text{ est un réel non nul)}$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$. La résolution de l'équation $P(x) = 0$ est donné par :

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions, appelées racines du polynôme, données par : $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une seule solution, appelée racine double du polynôme, donnée par : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$;
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'admet aucune solution réelle.

Exercice 3 : Déterminer les racines éventuelles des polynômes suivants :

1. $f_1(x) = x^2 - 5x + 6$
2. $f_2(x) = x^2 - \dfrac{10}{3}x + 1$
3. $f_3(x) = 2x^2 - 2x + 9$
4. $f_4(x) = 5x^2 + 3x - 2$
5. $f_5(x) = -4x^2 + 4x - 1$
6. $f_6(x) = -3x^2 + 1$

4 Factorisation d'un trinôme :

Propriété 3 :

On considère le polynôme

$$P(x) = ax^2 + bx + c \text{ (où } a \text{ est un réel non nul)}$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$. On a :

- Si $\Delta > 0$, alors le trinôme admet une factorisation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right) \text{ où } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, alors le trinôme admet une factorisation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a\left(x - x_0\right)^2 \text{ où } x_0 = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, alors le trinôme n'admet pas de factorisation.

Exercice 4 : Factoriser, si possible, les polynômes suivants :

1. $f_1(x) = x^2 + x - 6$
2. $f_2(x) = 5x^2 + 1$
3. $f_3(x) = 3x^2 - 7x$
4. $f_4(x) = 9x^2 + 6x + 1$
5. $f_5(x) = x^2 + x + 1$
6. $f_6(x) = 8x^2 - 1$

5 Signe d'un trinôme :

Propriété 4 :

On considère le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ (où a est un réel non nul).
On note $\Delta = b^2 - 4ac$:

- Si $\Delta > 0$, alors $P(x)$ est du signe de a "à l'extérieur des racines" :

  Par exemple, si $a > 0$ et $x_1 < x_2$ on a :

  $\forall x \in \left]-\infty ; x_1\right[\bigcup \left]x_2 ; -\infty\right[, P(x) > 0$
- Si $\Delta = 0$, alors le trinôme est du signe de a, en s'annulant en x_0.
- Si $\Delta < 0$, alors le trinôme est strictement du signe de a.

<u>Exercice 5 :</u> Déterminer le tableau de signe des polynômes suivants :

1. $f_1(x) = -x^2 - 6$
2. $f_2(x) = 2x^2 + 4x - 30$
3. $f_3(x) = 5x^2 - 3x$
4. $f_4(x) = 6x^2 - 5x + 1$
5. $f_5(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 2$
6. $f_6(x) = 5x^2 - 3$