Chapitre 5

# Trigonométrie

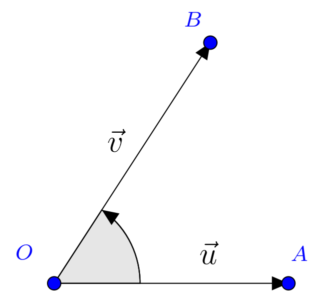
## Table des matières

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Le plan est orienté dans le sens direct (sens anti horaire).
Toutes les mesures d'angles seront en radian.

# 1 Angles orientés

**Définition 1 :**

Soit trois points distincts $O$ , $A$, $B$ du plan, on note $\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right)$ l'angle orienté dont la valeur absolue de la mesure correspond à l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ et le signe est donné par le sens de $\overrightarrow{OA}$ vers $\overrightarrow{OB}$.




**Définition 2 :**

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls. On note $A$ et $B$ les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, on définit l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ par la relation :

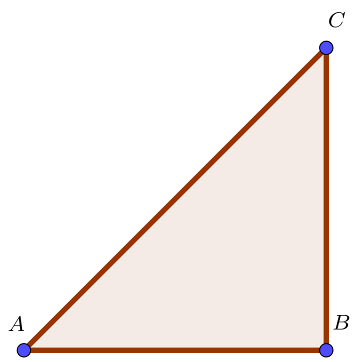
$$(\vec{u}; \vec{v}) = \left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right)$$

Remarque : Les mesures des angles orientés ne dépendent pas des représentant des vecteurs.

Exercice 1 :

Dans le triangle rectangle isocèle $ABC$, déterminer les mesures des angles suivants :

- $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$ =....................................
- $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}\right)$ =....................................
- $\left(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}\right)$ =....................................
- $\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{AB}\right)$ =....................................



**Propriété 1 :**

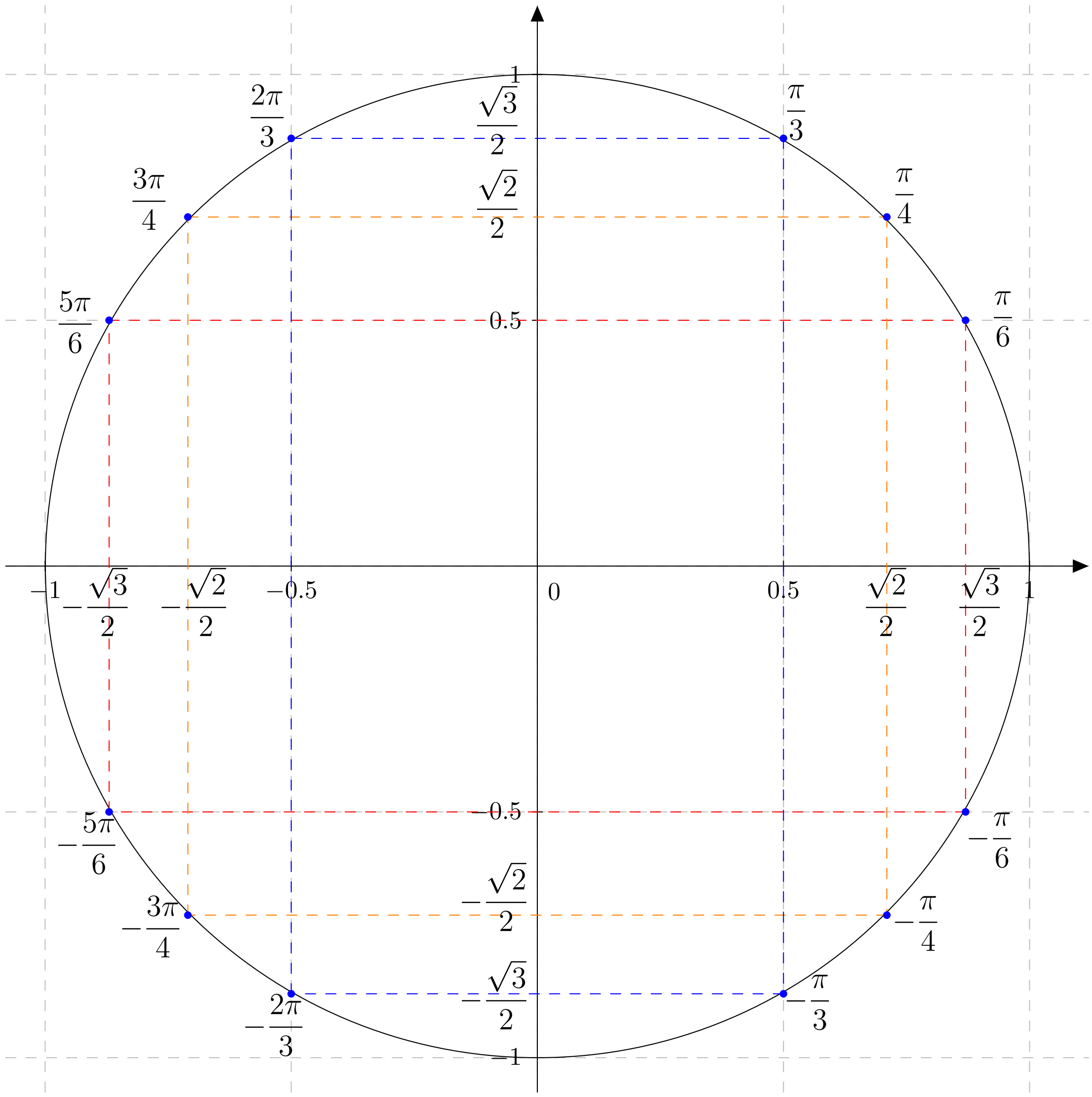
Pour deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ , $\vec{w}$ non nuls.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens si et seulement si $(\vec{u};\vec{v}) = 0 \quad [2\pi]$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire si et seulement si $(\vec{u};\vec{v}) = \pi \quad [2\pi]$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $(\vec{u};\vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ ou $(\vec{u};\vec{v}) = -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

## 2 Cercle trigonométrique

**Définition 3 :**

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre $O$ et de rayon 1, orienté dans le sens direct, dit aussi sen trigonométrique.
A tout point $M$ du cercle, on associe l'angle $\left(\vec{i}, \vec{OM}\right)$. Une mesure en radian de l'angle $\left(\vec{i}, \vec{OM}\right)$ est égale à la distance algébrique curviligne 6.0pt$\widehat{\mathrm{OM}}$.

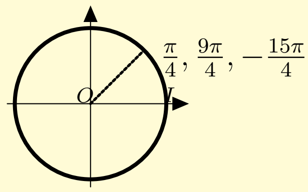


### Propriété 2 :

Pour $M$ un point sur le cercle, on note $x$ une mesure de l'angle $\left(\vec{i}, \vec{OM}\right)$ . Pour $k \in \mathbb{Z}$ , le nombre $x + 2k\pi$ est aussi une mesure de l'angle $\left(\vec{i}, \vec{OM}\right)$ . Il y a donc une infinité de mesure pour un même angle, toutes égales à $2\pi$ près.

### Exemple 1 :

Pour le point $M$ associé à la mesure $\frac{\pi}{4}$, il est aussi associé à la mesure $\frac{9\pi}{4}$, en faisant un tour de plus dans le sens trigonométrique, ou à la mesure $-\frac{15\pi}{4}$, en faisant deux tours dans le sens négatif.




Exercice 2 : On considère le point $M$ associé à l'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.
Déterminer les mesures $x$ de l'angle $\left(\vec{i}, \vec{OM}\right)$ tels que :

(a) $x \in [2\pi; 4\pi]$ | (b) $x \in [8\pi; 12\pi]$ | (c) $x \in [-106\pi; -90\pi]$

### Définition 4 :

Pour $M$ un point sur le cercle, on appelle **mesure principale** de l'angle $\left(\vec{i}, \vec{OM}\right)$ la mesure $x$ de cet angle telle que $x \in ]-\pi, \pi]$ . Cette mesure est unique.

### Exemple 2 :

Pour un angle de mesure $\frac{113\pi}{6}$, sa mesure principale est $\frac{5\pi}{6}$, en effet :
$\frac{113\pi}{6} = \frac{108\pi + 5\pi}{6} = \frac{108\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 18\pi = \frac{5\pi}{6} + 9 \times 2\pi$. Il y donc 9 tours en trop...

Exercice 3 : Déterminer la mesure principale des angles suivants :

(a) $x = -11\pi$ | (b) $x = \frac{53\pi}{4}$ | (c) $x = \frac{77\pi}{3}$

### Propriété 3 :

Pour $M$ et $M'$ deux points sur le cercle, avec $x$ une mesure de l'angle $\left(\vec{i}, \vec{OM}\right)$ et $x'$ une mesure de l'angle $\left(\vec{i}, \vec{OM'}\right)$ . Une mesure de l'angle $\left(\vec{OM}, \vec{OM'}\right)$ est $x' - x + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

# 3 Fonction trigonométrique

**Définition 5 :**

Pour $M$ un point sur le cercle, avec $x$ une mesure de l'angle $\left(\vec{i}, O\vec{M}\right)$.
L'abscisse du point $M$ est notée $\cos(x)$ ( se lit cosinus de $x$ ).
L'ordonnée du point $M$ est notée $\sin(x)$ ( se lit sinus de $x$ ).

**Définition 6 :**

On appelle cosinus la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à $x$ associe $\cos(x)$.
On appelle sinus la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à $x$ associe $\sin(x)$ .

**Tableau des valeurs usuelles :**

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos(x)$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ |
| $\sin(x)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ |

**Propriété 4 :**

Les propriétés suivantes sont vraies pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$ :

- $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.
- $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$.
- $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$.
- $\cos(-x) = \cos(x)$.
- $\sin(-x) = -\sin(x)$.

# 4 Représentation graphique