Chapitre 2

Probabilités

Table des matières

1 Vocabulaire

Définition 1 :

On appelle expérience aléatoire une expérience où seul le hasard intervient.
Les différents résultats d'une expérience aléatoire s'appellent des éventualités.
L'ensemble des éventualités s'appelle l'univers, on le note Ω.
Un événement est une partie (ou un sous-ensemble) de l'univers.
On dit que cet événement est réalisé si l'une des éventualités qui le compose est réalisée.
Ω s'appelle l'événement certain
$\varnothing$ s'appelle l'événement impossible
Un événement est dit élémentaire s'il contient une seule éventualité

Exemple 1 :

On lance un dé à six faces.
Les éventualités sont :...
L'univers est $\Omega =$..
Exemple d'un évènement : ....
Exemple d'un évènement élémentaire : ....

2 Évènement contraire

Définition 2 :

Soit Ω un univers fini et A un évènement de Ω.
On appelle événement contraire de l'évènement A, noté $\bar{A}$, l'ensemble des éléments de Ω n'étant pas dans A.

Exemple 2 :

On lance un dé à six faces.
Pour $A =$"obtenir un nombre inférieur ou égal à 2"
$\bar{A} =$..

3 Union de deux évènements

Définition 3 :

Soit Ω un univers fini et A et B deux évènements de Ω.
On appelle réunion, ou union, l'évènement A et B, noté $A \cup B$, l'ensemble des éléments de Ω appartenant à A ou à B.

Exemple 3 :

On lance un dé à six faces.
Pour $A =$"obtenir un nombre inférieur ou égal à 2"
Pour $B =$"obtenir un nombre paire"
$A \cup B =$..

4 Intersection de deux évènements

Définition 4 :

Soit Ω un univers fini et A et B deux évènements de Ω.
On appelle intersection des évènements A et B, noté $A \cap B$, l'ensemble des éléments de Ω appartenant à A et à B.

Exemple 4 :

On lance un dé à six faces.
Pour $A =$"obtenir un nombre inférieur ou égal à 2"
Pour $B =$"obtenir un nombre paire"
$A \cap B =$...

5 Événements disjoints

Définition 5 :

Soit Ω un univers fini et A et B deux évènements de Ω.
On dira que A et B sont disjoints (ou incompatibles) si leur intersection est vide :

$$A \cap B = \varnothing$$

Exemple 5 :

On lance un dé à six faces.
Pour $A =$"obtenir un nombre inférieur ou égal à 2"
Déterminer un évènement B tel que A et B soit disjoint :
$B =$...

6 Probabilité d'un évènement

Définition 6 :

Soit Ω un univers fini. On définit une probabilité P en associant à chaque évènement un nombre compris entre 0 et 1 tel que :

- $P(\Omega) = 1$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour des évènements A et B disjoints.

Propriété 1 :

Pour P une probabilité sur un univers Ω :

- $P(\varnothing) = 0$.
- Pour A un évènement quelconque : $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
- La probabilité de l'événement A est la somme des probabilités des événements élé-

mentaires qui le composent : Si $A=\{a_1;a_2;...;a_n\}$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(\{a_i\})$$

Exemple 6 :

On lance un dé à six faces.
On suppose que chaque face à la même probabilité d'apparaitre, alors pour A ="obtenir un nombre inférieur ou égal à 2" on a :
$P(A)=$...

Exemple 7 :

On lance un dé à six faces truqué.
On suppose que l'on a :

- $P(\{1\})=\dfrac{1}{12}$
- $P(\{2\})=P(\{3\})=P(\{4\})=P(\{5\})=\dfrac{1}{8}$.
- $P(\{6\})=\dfrac{5}{12}$

Déterminer la probabilité de l'événement B="le nombre est paire" :
$P(B)=$...

7 Équiprobabilité

Définition 7 :

Lorsque chaque événement élémentaire a la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité ou que les événements élémentaires sont équiprobables.

Expressions qui signifient qu'il y a équiprobabilité : On tire au hasard une carte dans un jeu... On lance une pièce parfaitement équilibrée... On jette un dé non pipé... Les jetons ou les boules sont indiscernables au toucher...

Propriété 2 :

On se place dans un univers Ω équiprobable. Si le nombre d'évènements élémentaires en n, alors la probabilité de chaque évènement élémentaire en $\dfrac{1}{n}$.
Pour tout évènement A, on a :

$$P(A)=\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}=\frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'élément de }\Omega}$$

Exemple 8 :

On lance un dé à six faces.
On suppose que chaque face à la même probabilité d'apparaitre, alors pour $A =$"obtenir un nombre inférieur ou égal à 2" on a :
$P(A) =$...

Propriété 3 :

On se place dans un univers Ω équiprobable.A et B deux évènements.

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dans le cas où A et B sont disjoints.

Exemple 9 :

On lance un dé à six faces.
Pour $A =$"obtenir un nombre inférieur ou égal à 2"
Pour $B =$"obtenir un nombre paire"
$P(A \cup B) =$...

8 Conditionnement par un événement de probabilité non nulle

8.1 Définition

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω, et soit A un événement de Ω tel que $P(A) \neq 0$.

Définition 8 :

Pour tout événement B de Ω, on appelle probabilité de B sachant A le réel noté $P_A(B)$ tel que :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exemple 10 :

Une société de location de véhicules possède un parc de 800 véhicules de trois marques différentes A, B et C. Dans chacune des marques, la société possède deux modèles de véhicules : "Essence" ou "Diesel".

Nombre de véhicules	Marque A	Marque B	Marque C	Total
Diesel	300	100	100	500
Essence	80	60	160	300
Total	380	160	260	800

On choisit une voiture au hasard dans le parc automobile.
On note :

- A l'évènement : "La voiture est de marque A ".
- B l'évènement : "La voiture est de marque B ".
- C l'évènement : "La voiture est de marque C ".
- D l'évènement : "La voiture a une motorisation diesel ".
- E l'évènement : "La voiture a une motorisation essence ".

Déterminer la probabilité de la voiture soit de marque A, sachant qu'elle est diesel.
....
....
....
....
Déterminer la probabilité de la voiture soit de essence, sachant qu'elle est de marque B.
....
....
....
....

Propriété 4 :

P_A est une nouvelle probabilité définie sur Ω, appelée probabilité conditionnelle sachant A. On a donc :

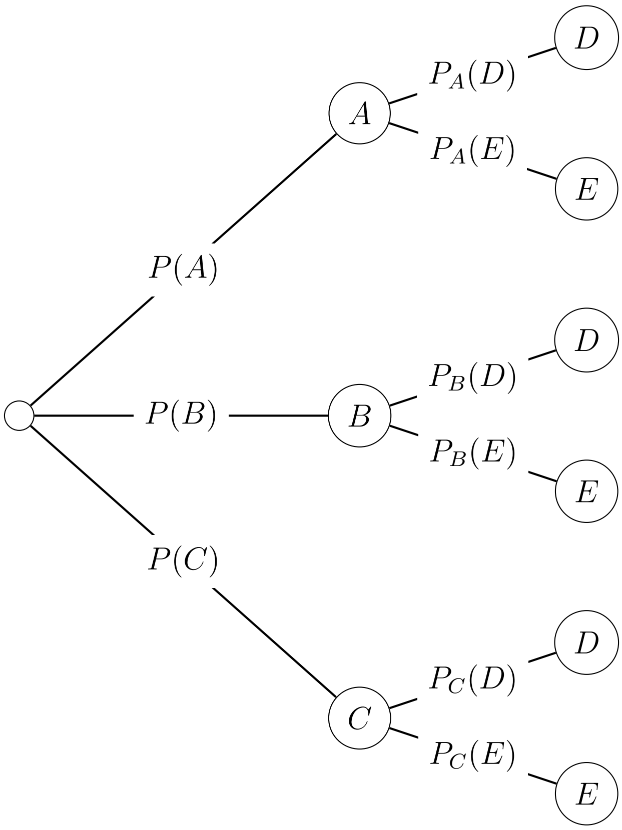
- $P_A(A) = 1$
- Pour tout évènement B, on a : $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$.
- Si A et B sont disjoints, $P_A(B) = 0$.
- Pour tous évènements A et B, non vide, on a :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

8.2 Arbre pondéré

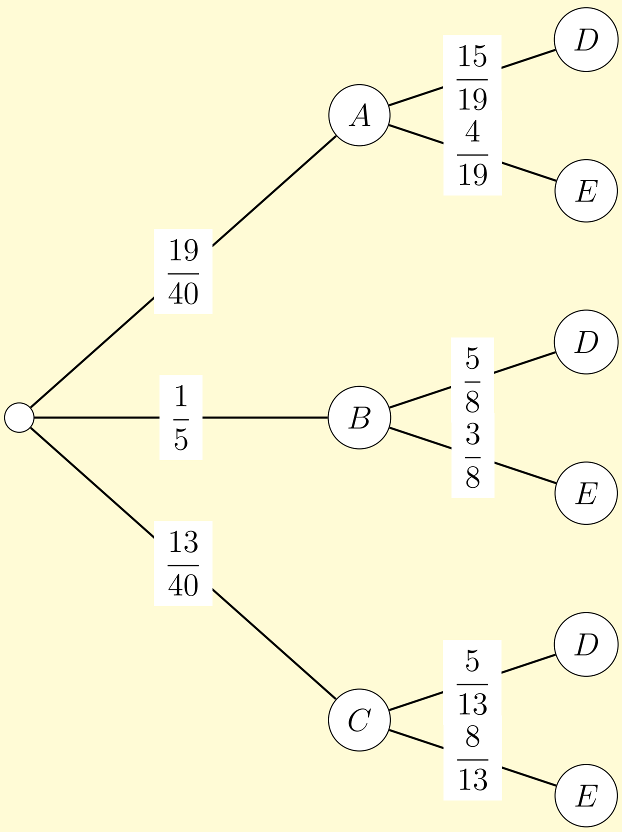
Un arbre pondéré est une représentation d'un univers probabilisé dans laquelle on représente certains évènements :

- Le poids d'une branche donne la probabilité de l'évènement auquel elle aboutit.
- La somme des poids issus d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un chemin est égale au produit des poids rencontrés.



Exemple 11 :

En reprenant les données de l'exemple 10, on peut représenter l'univers par :

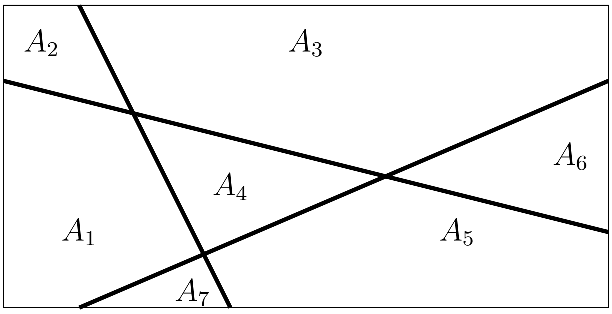


Exercice 1 : Construire, avec les données de l'exemple 10, l'arbre pondéré commençant par la motorisation.

8.3 Partition de l'univers

Définition 9 :

On considère un univers probabilisé Ω.
On dit que les évènements $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de l'univers Ω si chaque éventualité de Ω appartient à un et un seul des évènements A_i, pour $i \in [1, n]$.



Remarque : Si les évènements $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de l'univers Ω, ils sont forcément disjoints deux à deux, et leur union totale est l'univers.

Exemple 12 :

Dans l'exemple 10, A , B et C forment une partition de l'univers.
Dans l'exemple 10, D et E forment une partition de l'univers.

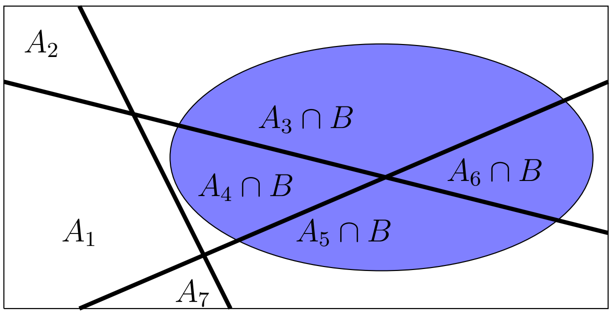
Propriété 5 :

Formule des probabilités totales :
Soit une partition $A_1, A_2, ..., A_n$ de l'univers Ω. Pour tout évènement B on a :

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + ... + p(A_n \cap B)$$

ou encore

$$p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + ... + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$$



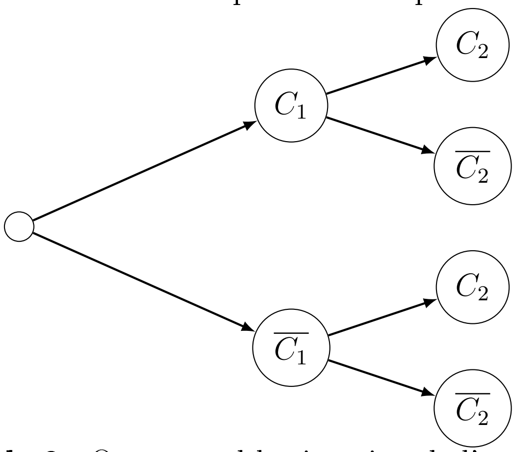
Exemple 13 :

Dans l'exemple 10, A, B et C forment une partition de l'univers. On a bien :
$P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D)$

8.4 Un cas particulier

Exemple 1 : Un considère un jeu de 32 cartes. On tire successivement deux cartes et on considère les évènements C_1 : « la première carte est un cœur »et C_2 : « la deuxième carte est un cœur ». On suppose de plus qu'on replace la première carte dans le jeu avant de tirer la deuxième.

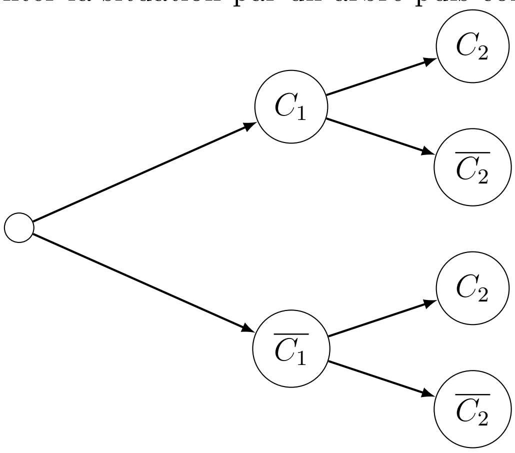
Représenter la situation par un arbre puis compléter le tableau à double entrées associés :



	C_2	$\overline{C_2}$	Total
C_1			
$\overline{C_1}$			
Total			1

Exemple 2 : On reprend la situation de l'exemple précédent mais on suppose cette fois qu'on ne replace pas la première carte dans le jeu avant de tirer la deuxième.

Représenter la situation par un arbre puis compléter le tableau à double entrées associés :



	C_2	$\overline{C_2}$	Total
C_1			
$\overline{C_1}$			
Total			1

Comparons dans les deux exemples les probabilités $P_{C_1}(C_2)$ et $P(C_2)$:

Exemple 1

- $P_{C_1}(C_2) =$
- $P(C_2) =$

Exemple 2

- $P_{C_1}(C_2) =$
- $P(C_2) =$

Que peut-on dire de l'influence de l'évènement C_1 sur l'évènement C_2 dans les deux cas ?

Définition 10 :

On dira que A et B sont indépendants si $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$.

Exercice : Démontrer les propriétés suivantes :

1. si A et B sont deux évènements indépendants, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
2. si $P_A(B) = P(B)$ alors on a aussi $P_B(A) = P(A)$.

9 Succession d'épreuves indépendantes

On dit que des épreuves sont indépendantes si elles n'ont pas d'influence les une sur les autres.

Exemple 14 :

On lance trois dés de six. On note A_i l'événement obtenir un 6 sur le dé i.
On obtient l'arbre suivant :