

Chapitre 6

Produit scalaire

Table des matières

1	Coordonnées d'un vecteur	2
1.1	Définition	2
1.2	Coordonnées d'un vecteur défini par deux points	2
2	Norme d'un vecteur	3
3	Produit scalaire	3
3.1	Définitions	3
4	Propriétés	5
5	Applications	7

On se place dans un repère orthonormal $(O; I, J)$. On notera $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$

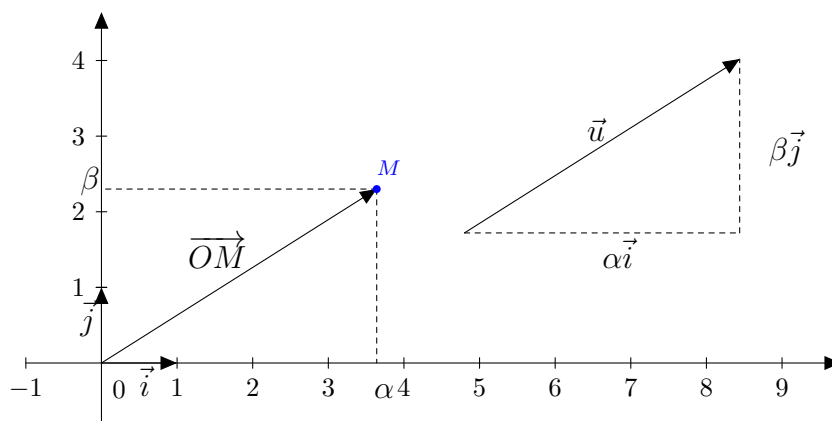
1 Coordonnées d'un vecteur

1.1 Définition

§ Définition 1 :

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe deux réels α et β tel que $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ appelés coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. On note alors $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

Ces coordonnées correspondent aux coordonnées du point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.



Remarque : les coordonnées du vecteur nul sont : $\vec{0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

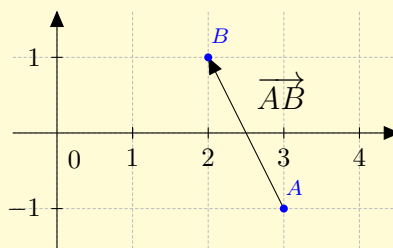
1.2 Coordonnées d'un vecteur défini par deux points

§ Propriété 1 :

Soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

§ Exemple 1 :

Soit $A(3, -1)$ et $B(2, 1)$, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$



2 Norme d'un vecteur

Propriété 2 :

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, la norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$ est donné par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, est donné par :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

remarque : $\|\vec{0}\| = 0$

Exemple 2 :

Déterminer la norme des vecteurs suivants :

- $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$: $\|\vec{u}\| = \dots\dots\dots$
- $A(2, 5)$ et $B(-4, 1)$: $\|\overrightarrow{AB}\| = \dots\dots\dots$

3 Produit scalaire

3.1 Définitions

Définition 2 :

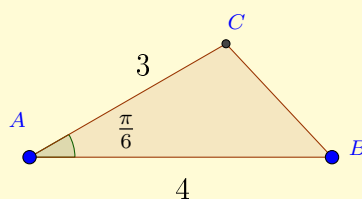
Définition avec les angles

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on définit le produit scalaire, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, par le nombre réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Exemple 3 :

Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans le cas suivant :



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dots\dots\dots$

Définition 3 :

Définition avec les projections

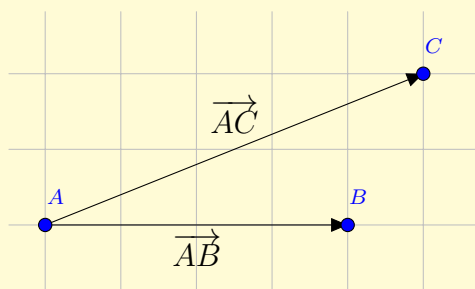
On considère trois points O , A et B .

On a : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overline{OA} \times \overline{OH}$ où H est le projeté orthogonal de B sur (OA) , et $\overline{OA}$ est la mesure algébrique de OA .

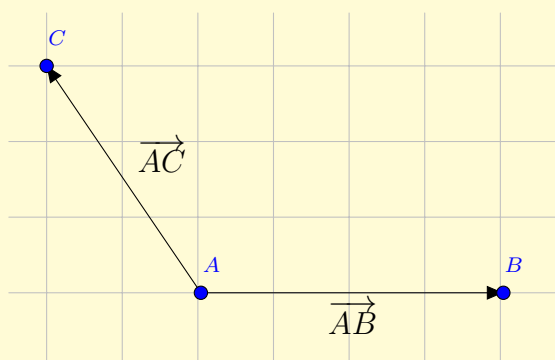
- Si A et H sont du même côté par rapport à O , on a : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OH$.
- Sinon : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -OA \times OH$

Exemple 4 :

Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans les cas suivants (l'unité étant le carreau) :



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dots\dots\dots$



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dots\dots\dots$

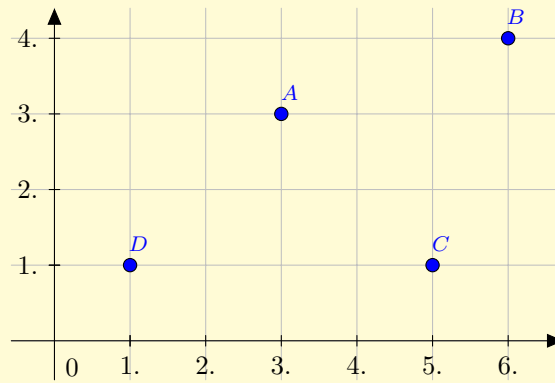
Définition 4 :

Définition avec les coordonnées

Soit deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$, on définit le produit scalaire par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \alpha\alpha' + \beta\beta'$$

Exemple 5 :



Déterminer les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dots\dots\dots$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \dots\dots\dots$$

4 Propriétés

Propriété 3 :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, on a :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times \vec{u} \cdot \vec{v}$, où $k \in \mathbb{R}$
- $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ (Carré scalaire)
- Identité remarquables :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

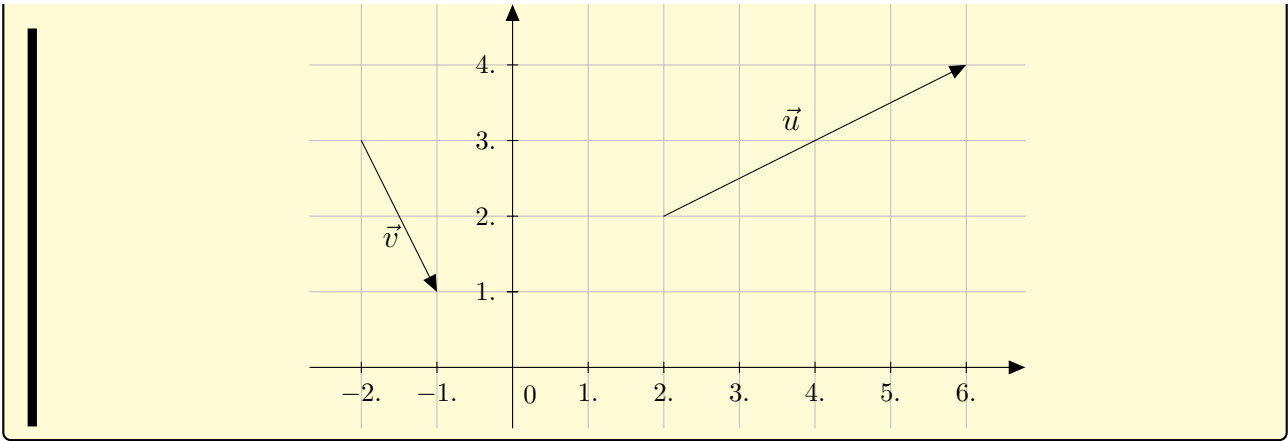
Propriété 4 :

Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

Exemple 6 :

Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux :



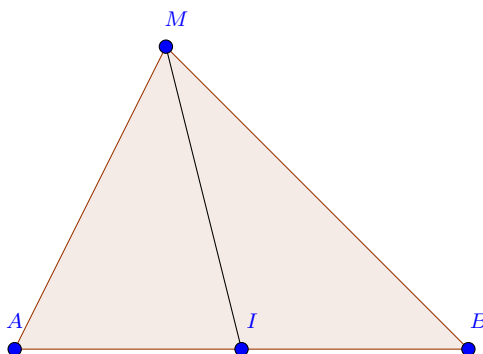
5 Applications

Propriété 5 :

Théorème de la médiane

A et B deux points du plan, et I milieu de $[AB]$. Pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

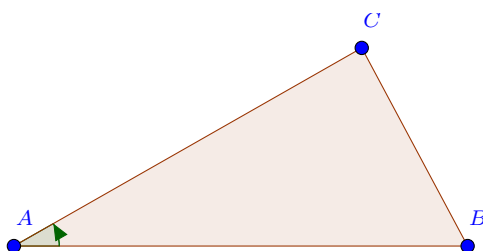


Propriété 6 :

Théorème d'Al-Kashi ou Loi des cosinus

Soit ABC un triangle, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\vec{AB}, \vec{AC})$$



Exemple 7 :

On donne $AB = 4$, $AC = 3,8$ et $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{6}$, déterminer la valeur de BC :