

## Chapitre 6

## Fonction exponentielle

**Table des matières**

<b>1 Définitions :</b>	<b>2</b>
<b>2 Propriétés algébriques</b>	<b>3</b>
<b>3 Courbe :</b>	<b>3</b>
<b>4 Équations et inéquations :</b>	<b>4</b>
<b>5 Exponentielle et suite géométrique</b>	<b>4</b>

# 1 Définitions :

## Définition 1 :

On appelle fonction exponentielle, notée  $\exp$ , l'unique fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

**Remarque :** On a donc :

- $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $(\exp(x))' = \exp(x)$
- $\exp(0) = 1$

## Définition 2 :

On note  $e$  l'image de 1 par la fonction exponentielle :

$$e = \exp(1)$$

$e$  est appelé nombre d'Euler ou encore constante de Néper.

On a  $e = 2,71828$  à  $10^{-5}$  près.

Dans le reste du chapitre, nous noterons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = e^x$$

On a donc :

- $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $(e^x)' = e^x$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$ ,  $(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$
- $e^0 = 1$

## Propriété 1 :

- Pour tout réel  $x$ ,  $e^x \times e^{-x} = 1$ .
- La fonction exponentielle ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ .
- Pour tout réel  $x$ ,  $e^x > 0$ .
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Exercice 1 : Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

- |                              |                                   |
|------------------------------|-----------------------------------|
| • $f_1(x) = xe^x$            | • $f_3(x) = (x^2 - 2x + 3)e^{-x}$ |
| • $f_2(x) = (x + 3)e^{2x-1}$ | • $f_4(x) = (e^x)^2$              |

## 2 Propriétés algébriques

### Propriété 2 :

- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, e^{a+b} = e^a \times e^b.$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}.$
- $\forall a \in \mathbb{R}, e^{-a} = \frac{1}{e^a}.$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, (e^a)^b = e^{ab}.$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{e^a} = e^{\frac{a}{2}}.$

### Exemple 1 :

- |                              |                      |
|------------------------------|----------------------|
| • $e^5 \times e^3 = e^8$     | • $(e^3)^5 = e^{15}$ |
| • $\frac{e^3}{e^7} = e^{-4}$ | • $\sqrt{e^8} = e^4$ |
| • $\frac{1}{e^5} = e^{-5}$   |                      |

Exercice 2 : Simplifier les expressions suivantes :

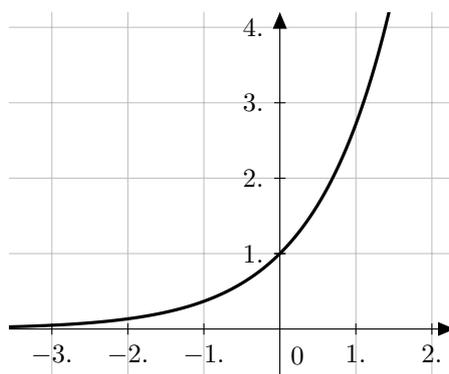
1.  $A = e^8 \times e^{-3}$

2.  $B = \frac{e^6}{e^2}$

3.  $C = (e^5)^4$

4.  $D = \frac{e^5 \times e^7}{e^{-2} \times e}$

## 3 Courbe :



### Propriété 3 :

$$e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

$$e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

## 4 Équations et inéquations :

### Propriété 4 :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad e^x = e^a \Leftrightarrow x = a$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad e^x > e^a \Leftrightarrow x > a$$

### Exemple 2 :

$$e^x = e^3 \Leftrightarrow x = 3$$

$$e^x > e^5 \Leftrightarrow x > 5$$

Exercice 3 : Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$1. e^x = e^9$$

$$2. e^{2x+3} = -3$$

$$3. e^{2x+3} = e^{5-7x}$$

$$4. e^{3x-2} = 1$$

Exercice 4 : Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

$$1. e^{2x} > e^2$$

$$2. e^{3x-1} \leq -5$$

$$3. e^{2x+3} > e^{5-7x}$$

$$4. e^{-2x-1} \geq -1$$

## 5 Exponentielle et suite géométrique

### Propriété 5 :

Soit  $a$  un réel.

La suite  $e^{na}$  est une suite géométrique de raison  $e^a$ .

Exercice 5 : Déterminer la raison et le premier terme des suites définies par :

$$1. u_n = 3e^n$$

$$2. u_n = -e^{2n}$$

$$3. u_n = 5e^{-n+3}$$

$$4. u_n = -3e^{-2n+1}$$