Chapitre 4

Dérivation

Table des matières

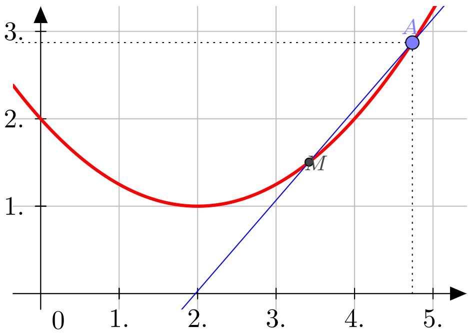
Dans tout le chapitre, f désigne une fonction définie sur un intervalle I, et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1 Dérivée en un point

Définition 1 :

Soit $a \in I$

Si le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel l quand h tend vers 0, alors on dira que f est dérivable en a . Cette limite est appelée nombre dérivé de la fonction f en a et se note $f'(a)$. La quotient $T_{f,a}(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ s'appelle le taux d'accroissement de f en a.



Exemple 1 :

Pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, en prenant $a = 2$, on a :

$T_{f,2}(h) = \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{(2+h)^2-2^2}{h} = \dfrac{4h+h^2}{h} = 4+h$

On a donc : $\lim\limits_{h\to 0} T_{f,2}(h) = 4$. On dira donc que f est dérivable en 2, et que $f'(2) = 4$

Exercice 1 : Déterminer le nombre dérivé en $a = -1$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 3$$

2 Fonction dérivée

Définition 2 :

La fonction f est dite dérivable sur I lorsqu'elle est dérivable en tout point a de I. La fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f. On la note f'.

Exemple 2 :

Pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, en prenant $x \in \mathbb{R}$, on a :

$T_{f,x}(h) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \dfrac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$

On a donc : $\lim\limits_{h \to 0} T_{f,x}(h) = 2x$. On dira donc que f est dérivable en tout point $x \in I$, et on a donc $f'(x) = 2x$

Exercice 2 : Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer sa fonction dérivée pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 3$$

3 Dérivées des fonctions usuelles

On note D_f l'ensemble de définition de la fonction f, et I l'intervalle(s) sur le(s)quel(s) la fonction est dérivable :

D_f	$f(x)$	I	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	$k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$\mathbb{R}$	x	$\mathbb{R}$	1
$\mathbb{R}$	x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
$\mathbb{R}$	x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\mathbb{R}^+$	$\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercice 3 : Exprimer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^7$
2. $f_2(x) = x^{12}$
3. $f_3(x) = \dfrac{1}{x^3}$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{x^{45}}$

4 Opérations sur les dérivées

Propriété 1 :

On considère deux fonctions u et v dérivables sur I.

- Pour $k \in \mathbb{R}$. La fonction ku est dérivable sur I, et $(ku)' = ku'$.
- La fonction $u + v$ est dérivable sur I, et $(u+v)' = u' + v'$.
- La fonction uv est dérivable sur I, et $(uv)' = u'v + v'u$.
- Si $\forall x \in I$, $v(x) \neq 0$, La fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I, et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.
- Si $\forall x \in I$, $v(x) \neq 0$, La fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I, et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

Exemple 3 :

On considère la fonction f définie sur $I =]2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{5x^2 - 3x + 1}{x^2 - 4}$$

La fonction f est dérivable sur I, car il s'agit d'un quotient de deux fonctions dérivables, dont le dénominateur ne s'annule jamais sur I (car $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$).
On pose alors :

$$u(x) = 5x^2 - 3x + 1 \qquad v(x) = x^2 - 4$$

$$u'(x) = 10x - 3 \qquad v'(x) = 2x$$

On a donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(10x-3)(x^2-4) - 2x(5x^2-3x+1)}{(x^2-4)^2} \\ &= \frac{10x^3 - 3x^2 - 40x + 12 - 10x^3 + 6x^2 - 2x}{(x^2-4)^2} \\ &= \frac{3x^2 - 42x + 12}{(x^2-4)^2} \end{aligned}$$

Exercice 4 : Justifier la dérivabilité des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$, puis exprimer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 6$
2. $f_2(x) = (5x+3)(8-7x)$
3. $f_3(x) = \dfrac{1}{7x^2 + 1}$
4. $f_4(x) = \dfrac{2x^3 - 1}{x^2 + x + 1}$

5 Composée de fonctions dérivables

Propriété 2 :

On considère une fonctions g dérivable sur I et une fonction affine u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = ax + b$ (où a et b sont des réelles).
On note J l'intervalle tel que :

$$\forall x \in J \quad , \quad ax + b \in I$$

La fonction f définie sur J par $f(x) = g(ax + b)$ est dérivable sur J et :

$$f'(x) = a \times g'(ax + b)$$

Exemple 4 :

On considère la fonction f définie sur $I =]-3; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{5x + 15}$$

La fonction f est dérivable sur I, car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$. De plus :

$$x \in]-3; +\infty[\Rightarrow 5x + 15 \in]0; +\infty[$$

On peut donc dire que la fonction f est dérivable sur $I =]-3; +\infty[$, et on a :

$$\forall x \in I \quad , \quad f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x + 15}}$$

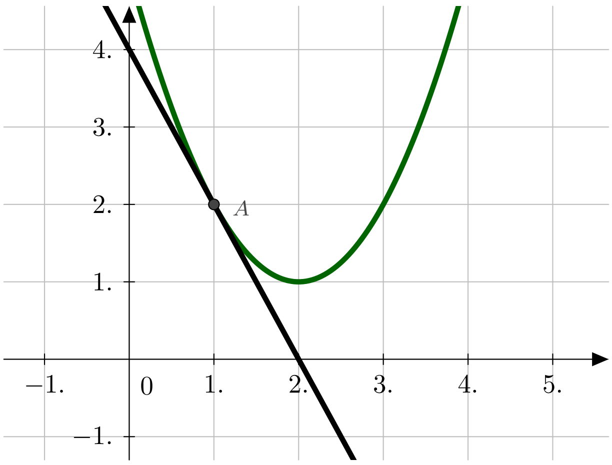
Exercice 5 : Justifier la dérivabilité des fonctions suivantes sur I, puis exprimer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = (8x - 4)^3$ sur $I = \mathbb{R}$
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{(3x + 1)^2}$ sur $I = \left] -\dfrac{1}{3}; +\infty \right[$

6 Tangente à la courbe

Propriété 3 :

Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors la courbe $\mathscr{C}$ admet au point $(a, f(a))$ une tangente de coefficient directeur $f'(a)$.



Propriété 4 :

Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors la courbe $\mathscr{C}$ admet au point $(a, f(a))$ une tangente d'équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exemple 5 :

Pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, et la dérivée est :

$$f'(x) = 2x - 4$$

Pour la tangente à la courbe au point d'abscisse $a = 1$:

- $f(1) = 2$
- $f'(1) = -2$

On a donc, $T_1 : y = -2(x-1) + 2$, soit $T_1 : y = -2x + 4$.

Exercice 6 : Déterminer l'équation réduite des tangentes au point d'abscisse a pour les fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x + 5$ en $a = -1$.
2. $f_2(x) = 5x^2 + 2x + 1$ en $a = 0$

7 Variations

Propriété 5 :

Soit f est dérivable sur I, les variations de la fonction f sont données par le signe de la dérivée :

- Si $f'(x)$ est positive sur I, alors f est croissante sur I.
- Si $f'(x)$ est négative sur I, alors f est décroissante sur I.

Exemple 6 :

On obtient le tableau de variation en y intégrant le tableau de signe de la dérivée.
Pour la fonction définie sur $[-1;3]$ par :

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$$

La fonction f est dérivable sur $[-1;3]$, car c'est un polynôme, et on a :

$$\forall x \in [-1;3] \quad , \quad f'(x) = 6x - 2$$

x	-1		$\frac{1}{3}$		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	10	$\searrow$	$\frac{14}{3}$	$\nearrow$	26

Exercice 7 : Déterminer le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^3 - 13x^2 - 3x + 7$$

8 Minimum, maximum

Propriété 6 :

Pour une fonction f définie sur I. Si la dérivée s'annule en changeant de signe, alors la fonction admet en ce point un extrémum local.

Exercice 8 : Déterminer les extrema locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^3 - 13x^2 - 3x + 7$$