Chapitre 5

Variables aléatoires

Table des matières

1 Définition

Exemple 1 :

Vous jetez deux dés. Pour chaque chiffre supérieur à 3 vous marquez 1 point, pour chaque chiffre 3 vous perdez 2 points.Dans les autres cas, vous ne gagnez ni ne perdez rien.
Compléter le tableau des gains :

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

On définie ainsi une variable aléatoire X associant le nombre de point obtenus.

Définition 1 :

Une variable aléatoire est une fonction qui, à chaque événement élémentaire d'une expérience aléatoire, associe un nombre réel.

Exemple 2 :

On note alors les évènements :

- A : " gagner un point " par l'évènement ($X =$ ....).
- B : " perdre deux points " par l'évènement ($X =$ ....).
- C : " avoir un score positif ou nul». " par l'évènement ($X \geqslant$ ....).

Déterminer les probabilités suivantes :

- $P(A) = P\left(X = \text{...........}\right) =$ ....
- $P(B) = P\left(X = \text{...........}\right) =$ ....
- $P(C) = P\left(X \geqslant \text{...........}\right) =$ ....

Définition 2 :

Si X est une variable aléatoire liée à une expérience aléatoire et si k est un nombre réel, $(X = k)$ désigne l'événement contenant tous les événements élémentaires associés au nombre k.
La probabilité de cet événement est alors $P(X = k)$.

Remarque : si $k \neq k'$ alors $(X = k)$ et $(X = k')$ sont disjoints.

2 Loi de probabilité

Exemple 3 :

Compléter le tableau associant à chaque évènement sa probabilité :

k	-4	-2	-1	0	1	2
$P(X = k)$						

Remarque : Les événements étant deux à deux disjoints et que leur réunion est l'univers tout entier, la somme de leur probabilité est 1.

Définition 3 :

La loi de probabilité d'une variable X est la fonction qui, à chaque nombre réel k, associe la probabilité de l'événement $(X = k)$.

Remarque : La loi de probabilité est définie, pour des lois discrètes, par le tableau donnant $P(X = k)$ en fonction des différentes valeurs de k.

3 Espérance, variance, écart-type.

Définition 4 :

L'espérance d'une variable aléatoire X (notée $E(X)$)est la moyenne de ses valeurs possibles pondérées par leur probabilité d'apparition :
Si $\{x_1; x_2; ...; x_n\}$ sont les valeurs prises par X, si l'on note $p_i = P(X = x_i)$, on a alors :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n$$

Exemple 4 :

Déterminer l'espérance dans l'exemple précédent :

Définition 5 :

On note $\{x_1; x_2; ...; x_n\}$ les valeurs prises par X,et $p_i = P(X = x_i)$.
On appelle variance de la variable aléatoire X, notée $V(X)$, le nombre :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (E(X) - x_i)^2 p_i$$

On appelle écart-type de la variable X, le nombre noté $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque

- $\min(x_i) \leqslant E(X) \leqslant \max(x_i)$.
- si X représente un gain et $E(X) = 0$, on parlera de jeu équitable.
- positivité de la variance et de l'écart-type.

Propriété 1 :

On dispose de la relation suivante :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

Exemple 5 :

Déterminer la variance et l'écart-type de l'exemple précédent :

Propriété 2 :

Pour X une variable aléatoire, on définit pour a et b réels, la loi $Z = aX + b$ dont les valeurs sont $\{ax_1 + b; ax_2 + b; ...; ax_n + b\}$. On a les relations :

- $P(Z = ax_i + b) = P(X = x_i)$
- $E(Z) = E(aX + b) = aE(X) + b$
- $V(Z) = V(aX + b) = a^2V(X)$