DS 9

Devoir sur table

(2 heures)

Nom :........................
Prénom :........................

Exercice 1 : (7 points)

Un restaurant propose trois types de formules :

- La formule A, pour 12 €, choisie par 50 % des clients ;
- La formule B, pour 15 €, choisie par 30 % des clients.
- La formule C, pour 20 €.

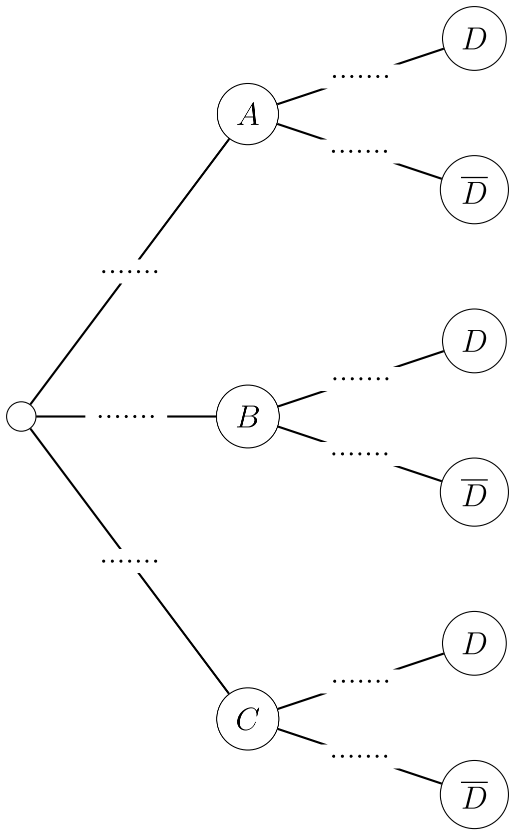
En supplément, le restaurateur propose des boissons pour 5 € :

- parmi les clients ayant pris la formule A, 80 % prennent les boissons ;
- parmi les clients ayant pris la formule B, 60 % prennent les boissons ;
- parmi les clients ayant pris la formule C, 90 % prennent les boissons.

On interroge au hasard un client de ce restaurant. On note :

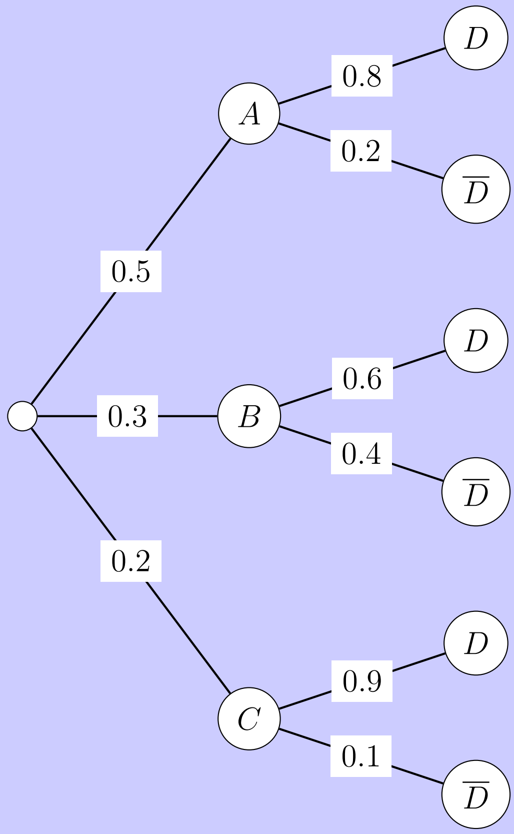
- A l'événement : « Le client prend la formule A » ;
- B l'événement : « Le client prend la formule B » ;
- C l'événement : « Le client prend la formule C » ;
- D l'événement : « Le client prend les boissons ».

1. Compléter l'arbre de probabilité associé à la situation.



Solution :

(0.5 point)



2. (a) Calculer la probabilité que le client prenne la formule A et les boissons.

Solution :

(0.5 point)
On cherche $P(A \cap D)$:
$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0.5 \times 0.8 = 0.4$

(b) Montrer que la probabilité que le client prenne les boissons est égale à $0,76$.

Solution :

(1 point)
On cherche $P(D)$. On se place sur la partition A, B et C. On peut alors utiliser la **formule des probabilités totales** :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) \\ &= P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D) \\ &= 0.5 \times 0.8 + 0.3 \times 0.6 + 0.2 \times 0.9 \\ &= 0.76 \end{aligned}$$

3. Soit X la variable aléatoire égale à la somme totale dépensée par le client.

(a) Montrer que l'on a :

$$P(X = 20) = 0,2$$

Solution :

(1 point)

L'événement $(X = 2)$ correspond à l'union disjointe de $B \cap D$ et de $C \cap \overline{D}$:

$$\begin{aligned} P(X=2) &= P(B \cap D) + P(C \cap \overline{D}) \\ &= P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(\overline{D}) \\ &= 0.3 \times 0.6 + 0.2 \times 0.1 \\ &= 0.2 \end{aligned}$$

(b) Déterminer, en justifiant, les différentes valeurs de la variable X .

Solution :

(1.5 points)

Les valeurs de la variable aléatoire sont :

- 12 : si le client prend la formule A sans les boissons (soit l'événement $A \cap \overline{D}$, avec une probabilité $P(A \cap \overline{D}) = 0.5 \times 0.2 = 0.1$.)
- 15 : si le client prend la formule B sans les boissons :(soit l'événement $B \cap \overline{D}$, avec $P(B \cap \overline{D}) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$.)
- $12+5 = 17$: si le client prend la formule A et les boissons (soit l'événement $A \cap D$, avec une probabilité : $P(A \cap D) = 0.5 \times 0.8 = 0.4$.)
- $15 + 5 = 20$: si le client prend a formule B et les boissons, ou a formule C et sans les boissons (soit l'événement $(B \cap D) \cup (C \cap \overline{D})$, avec une probabilité : $P\left((B \cap D) \cup (C \cap \overline{D})\right) = 0.3 \times 0.6 + 0.2 \times 0.1 = 0.20$.)
- $20+5 = 25$: si le client prend a formule C et les boissons (soit l'événement $(C \cap D)$, avec une probabilité : $P((C \cap D)) = 0.2 \times 0.9 = 0.18$.)

(c) Compléter le tableau de la loi de probabilité de X .

k					
$P(X = k)$					

Solution :

(1.5 points)

On obtient la loi suivante :

k	12	15	17	20	25
$P(X = k)$	0.1	0.12	0.4	0.2	0.18

(d) Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

Solution :

(1 point)
On a :

$$E(X) = 12 \times 0.1 + 15 \times 0.12 + 17 \times 0.4 + 20 \times 0.2 + 25 \times 0.18 = 18.3$$

Donc le restaurant peux espérer avoir en moyenne une dépense de chaque client de 18.3

Exercice 2 : (6 points)

On considère une entier n.

Un jeu est proposé avec un dé à 6 face, une urne A dans laquelle il y a n boules noires et 5 boules rouges, une urne B dans laquelle il y a n boules blanches et 5 boules noires.

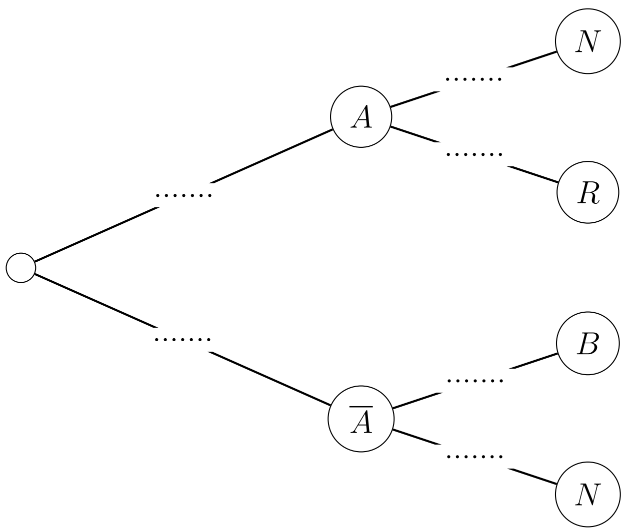
Le jeu se déroule ainsi :

- On lance le dé.
- Si le 6 apparait, on tire une boule dans l'urne A.
- Sinon, on tire une boule dans l'urne B.

On note :

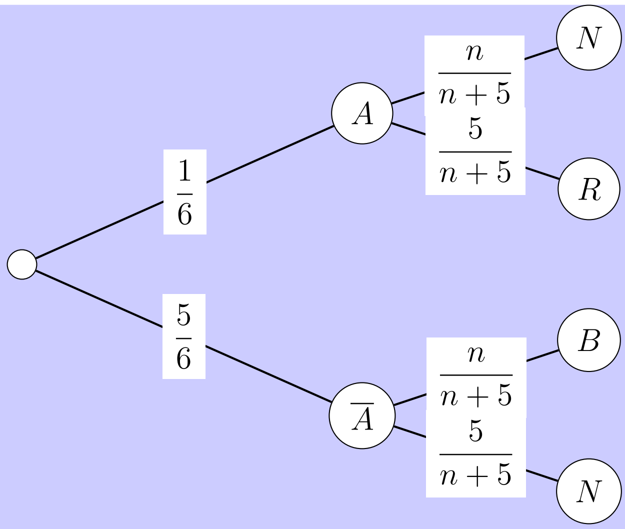
- A l'évènement « Obtenir un six ».
- N l'évènement « Obtenir une boule noire ».
- R l'évènement « Obtenir une boule rouge ».
- B l'évènement « Obtenir une boule blanche ».

1. Compléter l'arbre de probabilité associé à la situation.



Solution :

(1 point)



2. Montrer que la probabilité d'obtenir une boule noire est $P(N) = \dfrac{n+25}{6n+30}$.

Solution :

(1,5 points)

A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(N) &= P(A) \times P_A(N) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(N) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{n}{n+5} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{n+5} \\ &= \frac{n+25}{6n+30} \end{aligned}$$

On décide d'associer un gain au jeu :

- Si on obtient une boule noire, on gagne 15 €.
- Si on obtient une boule rouge, on gagne 5 €.
- Si on obtient une boule blanche, on perd 5 €.

On note X la variable aléatoire associant le gain en euros.

3. Compléter le tableau de la loi de probabilité de la variable X.

k	-5	5	15
$P(X=k)$			

Solution :

(1,5 points)

On donne la loi sous la forme d'un tableau :

k	-5	5	15
$P(X=k)$	$\dfrac{5n}{6n+30}$	$\dfrac{5}{6n+30}$	$\dfrac{n+25}{6n+30}$

4. Montrer que l'espérance, en fonction de n, est :

$$E(X)=\frac{-5n+200}{3n+15}$$

Solution :

(1 point)
On a :

$$\begin{aligned} E(X) &= (-5)\times\frac{5n}{6n+30}+5\times\frac{5}{6n+30}+15\times\frac{n+25}{6n+30} \\ &= \frac{-25n+25+375+15n}{6n+30} \\ &= \frac{-10n+400}{6n+30} \\ &= \frac{-5n+200}{3n+15} \end{aligned}$$

5. Déterminer la valeur de n pour que le jeu soit équitable.

Solution :

(1 point)
Pour que le jeu soit équitable, il faut que $E(X)=0$:

$$\begin{aligned} & E(X) &= 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{-5n+200}{3n+15} &= 0 \\ \Leftrightarrow\ & -5n+200 &= 0 \\ \Leftrightarrow\ & n &= 40 \end{aligned}$$

Exercice 3 : (7 points)
On considère la fonction f définie sur $D=[-5,5]$ par :

$$f(x)=\frac{x^2-4x+5}{x^2+x+5}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Montrer que l'on a, pour tout x réel :

$$f'(x)=\frac{5x^2-25}{(x^2+x+5)^2}$$

Solution :

La fonction est le quotient de deux polynômes, donc tout deux dérivables sur $\mathbb{R}$, et dont le dénominateur ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, donc la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur D.
On utilise la formule de la dérivée d'un quotient, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-4)(x^2+x+5)-(x^2-4x+5)(2x+1)}{(x^2+x+5)^2} \\ &= \frac{2x^3+2x^2+10x-4x^2-4x-20-2x^3-x^2+8x^2+4x-10x-5}{(x^2+x+5)^2} \\ &= \frac{5x^2-25}{(x^2+x+5)^2} \end{aligned}$$

2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f.

x	-5	$\cdots$	$\cdots$	$+5$
$5x^2-25$				
$(x^2+x+5)^2$				
$f'(x)$				
f				

Solution :

Le signe de la dérivée ne dépend que du signe du numérateur, donc les racines évidentes sont $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$, on a donc :

x	-5		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	2	$\nearrow$	$f(-\sqrt{5})$	$\searrow$	$f(\sqrt{5})$	$\nearrow$	$\frac{2}{7}$

3. Déterminer la valeur du maximum et du minimum de la fonction sur D.

Solution :

On cherche les images par f des annulateurs de la dérivée :

$$\begin{aligned} f(-\sqrt{5}) &= \frac{(-\sqrt{5})^2+4\sqrt{5}+5}{(-\sqrt{5})^2-\sqrt{5}+5} \\ &= \frac{4\sqrt{5}+10}{-\sqrt{5}+10} \\ &= \frac{(4\sqrt{5}+10)(10+\sqrt{5})}{95} \\ &= \frac{50\sqrt{5}+120}{95} \\ &= \frac{10\sqrt{5}+24}{19} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(\sqrt{5}) &= \frac{(\sqrt{5})^2-4\sqrt{5}+5}{(\sqrt{5})^2+\sqrt{5}+5} \\ &= \frac{-4\sqrt{5}+10}{\sqrt{5}+10} \\ &= \frac{(-4\sqrt{5}+10)(10-\sqrt{5})}{95} \\ &= \frac{-50\sqrt{5}+120}{95} \\ &= \frac{-10\sqrt{5}+24}{19} \end{aligned}$$

4. Déterminer une équation de la tangente T_0 à la courbe au point d'abscisse 0.

Solution :

On dispose de la formule :

$T_0 : y = f'(0)(x-0)+f(0)$ avec $f(0)=1$ et $f'(0)=-1$, donc $T_0 : y = -x+1$

5. Compléter le tableau de valeurs de la fonction (on donnera les valeurs à 10^{-1} près.).

x	-5	-4	-3	$-\sqrt{5}$	-2	-1	0	1	2	$\sqrt{5}$	3	4	5
$f(x)$													

Solution :

x	-5	-4	-3	$-\sqrt{5}$	-2	-1	0	1	2	$\sqrt{5}$	3	4	5
$f(x)$	2	2.2	2.4	2.5	2.4	2	1	0.3	0.1	0.1	0.1	0.2	0.3

6. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente T_0 et les tangentes horizontales.

Solution :