DS 8

Devoir sur table

(1 heure)

Nom :........................
Prénom :........................

Exercice 1 : (6 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2 \end{cases}$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite.

Solution :

On a : $u_0 = 5$, $u_1 = \dfrac{1}{2}u_0 + 2 = \dfrac{1}{2} \times 5 + 2 = \dfrac{9}{2}$, $u_2 = \dfrac{1}{2}u_1 + 2 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{9}{2} + 2 = \dfrac{17}{4}$, $u_3 = \dfrac{1}{2}u_2 + 2 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{17}{4} + 2 = \dfrac{33}{8}$.

2. On pose (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_n - 4.$$

Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

Solution :

On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 4 \\ &= \frac{1}{2}u_n + 2 - 4 \\ &= \frac{1}{2}u_n - 2 \\ &= \frac{1}{2}(u_n - 4) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

On a donc bien prouvé que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, et de premier terme 1.

3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

Solution :

Sachant que la suite est géométrique, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$
$v_n = v_0 \times q^n == \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{2^n}$

4. En déduire que l'on a la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2^{n+2} + 1}{2^n}$$

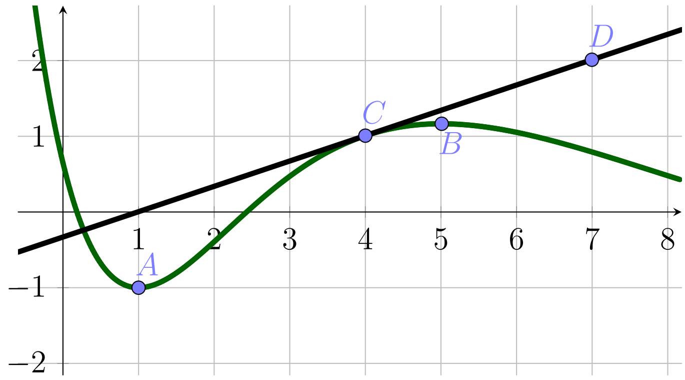
Solution :

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$v_n = u_n - 4 \Leftrightarrow u_n = v_n + 4 \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2^n} + 4 = \frac{1 + 2^n \times 4}{2^n} = \frac{2^{n+2} + 1}{2^n}$$

Exercice 2 : (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, dont on donne la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ ci-dessous.



On dispose aussi des informations suivantes :

(a) La courbe admet deux tangentes horizontales. Une au point $A(1;-1)$, l'autre au point $B(5;1,2)$.

(b) La tangente au point $C(4;1)$ passe par le point $D(7;2)$.

(c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

(d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Pour les questions suivantes, on utilisera le graphe et les informations données.

1. Déterminer, en justifiant, les valeurs suivantes :

   (a) $f(1)$ et $f'(1)$.

   Solution :

   Sachant que la courbe passe par $A(1;-1)$, donc $f(1) = -1$. Avec une tangente horizontale, donc $f'(1) = 0$.

   (b) $f(5)$ et $f'(5)$

   Solution :

   Sachant que la courbe passe par $B(5;1,2)$, donc $f(5) = 1,2$. Avec une tangente horizontale, donc $f'(5) = 0$.

2. Déterminer le coefficient directeur a de la droite (CD). En déduire une image particulière par f'.

Solution :

La formule du coefficient directeur donne :

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} \\ &= \frac{2-1}{7-4} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ce qui permet d'obtenir comme image : $f'(4) = \dfrac{1}{3}$.

3. Compléter le tableau de variation de la fonction f (en précisant le signe de la dérivée.)

x	$-\infty$	$\cdots$	$\cdots$	$+\infty$
$f'(x)$				
f				

Solution :

Par lecture graphique on a :

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1.2	$\searrow$	0

4. Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère l'équation $f(x) = m$. Dans quel intervalle doit se situer m pour que l'équation ai exactement 3 solutions. (Justifier)

Solution :

Pour $m \in]0; 1,2[$, l'équation a bien 3 solutions :

- Une sur $]-\infty; 1[$.
- Une sur $]1; 5[$.
- Une sur $]5; +\infty[$.

Du fait que ces intervalles, la fonction est strictement monotone.

Exercice 3 : (8 points)

On considère la fonction définie sur $I =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 8}{3x - 3}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthogonal.

1. On pose $p(x) = 3x^2 - 6x - 9$.Montrer que l'on a :

$$\forall x \in I, f'(x) = \frac{p(x)}{(3x-3)^2}$$

Solution :

$\forall x \in I$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v - v'u}{v^2} \\ &= \frac{(2x-5)(3x-3) - 3(x^2 - 5x + 8)}{(3x-3)^2} \\ &= \frac{6x^2 - 21x + 15 - 3x^2 + 15x - 24}{(3x-3)^2} \\ &= \frac{3x^2 - 6x - 9}{(3x-3)^2} \\ &= \frac{p(x)}{(3x-3)^2} \end{aligned}$$

2. Déterminer les racines éventuelles du polynôme $p(x) = 3x^2 - 6x - 9$ sur $\mathbb{R}$.

Solution :

On a $\Delta = 36 + 108 = 144$, il y a donc deux racines positives qui sont 3 et -1.
Sachant qu'un trinôme est "du signe de a à l'extérieur des racines" : On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$p(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. En déduire le tableau de variation de f sur I.
(On admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$)

x	$-\infty$	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
$p(x)$			$\Vert$		
$(3x-3)^2$			$\Vert$		
$f'(x)$			$\Vert$		
f			$\Vert$		

Solution :

On obtient le tableau de variation en f sur I intégrant le tableau de signe de la dérivée.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$p(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$(3x-3)^2$		$+$		$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{7}{3}$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. En quels points la tangente à $\mathscr{C}$ est-elle horizontale ?

Solution :

La tangente est horizontale si la dérivée s'annule, soit pour $x=-1$ et pour $x=3$: le point $A\left(-1,-\dfrac{7}{3}\right)$ est donc $B\left(3,\dfrac{1}{3}\right)$.

5. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2.

Solution :

En 2 : $f(2)=2$ et $f'(2)=-3$, on a donc $T_2 : y=-3(x-2)+2$ soit $T_2 : y=-3x+8$.
En 5 : $f(5)=2$ et $f'(5)=\dfrac{3}{4}$, on a donc $T_5 : y=\dfrac{3}{4}(x-5)+2$ soit $T_5 : y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{7}{4}$.

6. Compléter le tableau de valeurs suivant (les valeurs seront arrondies au dixième) :

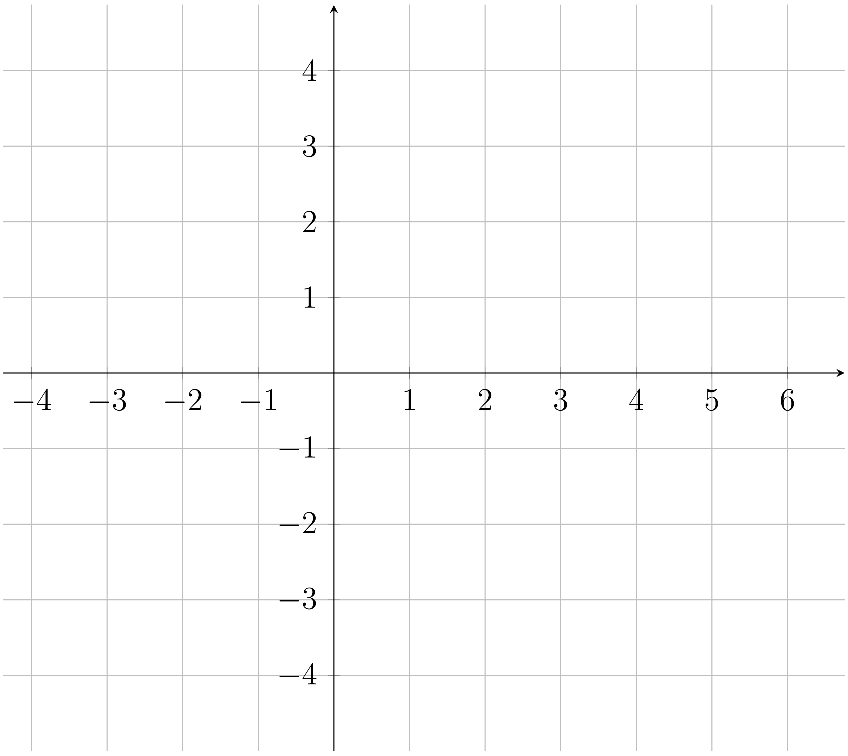
x	-4	-3	-2	-1	0	$0,5$	$1,5$	2	3	4	5	6
$f(x)$												

Solution :

(0.5 point)

x	-6	-4	-2	0	2	3	5	6	8	10	12	14
$f(x)$	-6.4	-4.5	-2.7	-1.0	0.0	-1.0	9.0	8.0	9.0	10.7	12.5	14.4

7. Tracer ces tangentes puis la courbe $\mathscr{C}$.



Solution :

(0.5 point)