DS 6

Devoir sur table

Exercice 1 : (3 points)

On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = \dfrac{3}{2}$.

1. Déterminer la valeur exacte de u_4.

Solution :

(1 point)

$u_4 = u_0 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 = \dfrac{405}{16}$

2. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près du 20 ième terme de la suite.

Solution :

(1 point)

On cherche $u_{19} = u_0 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^{19} = 11084,19$ à 10^{-2} près

3. Justifier que la suite (u_n) est croissante.

Solution :

(1 point)

Sachant que $u_0 > 0$, et que la raison $q > 1$, d'après le cours, la suite est croissante.

Exercice 2 : (5 points)

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = n(n+2)+3$.

   (a) Calculer les 3 premiers termes de la suite.

   Solution :

   (1 points)

   On a :

   - $u_0 = 0(0+2)+3 = 3$
   - $u_1 = 1(1+2)+3 = 6$
   - $u_2 = 2(2+2)+3 = 11$

   (b) Justifier que la suite n'est ni une suite arithmétique, ni une suite géométrique.

Solution :

(1 points)
On constate que :

- $u_1 - u_0 = 6 - 3 = 3$ et $u_2 - u_1 = 11 - 6 = 5$. Donc la différence n'est pas constante, donc la suite n'est pas arithmétique.
- $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{6}{3} = 2$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{11}{6}$. Donc le rapport n'est pas constante, donc la suite n'est pas géométrique.

2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \dfrac{3^{2n}}{2^{n+3}}$.

   (a) Calculer les 3 premiers termes de la suite.

Solution :

(1 points)
On a :

- $u_0 = \dfrac{3^{2\times 0}}{2^{0+3}} = \dfrac{1}{8}$
- $u_1 = \dfrac{3^{2\times 1}}{2^{1+3}} = \dfrac{9}{16}$
- $u_2 = \dfrac{3^{2\times 2}}{2^{2+3}} = \dfrac{81}{32}$

   (b) Quelle semble être la nature de la suite ?

Solution :

(0,5 points) On constate sur les premiers terme que l'on "passe" d'un terme à l'autre en multipliant pas $\dfrac{9}{2}$. Donc la suite semble être géométrique.

   (c) Montrer que la suite est une suite géométrique de raison $\dfrac{9}{2}$.

Solution :

(1.5 points)
Pour tout entier n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{3^{2(n+1)}}{2^{(n+1)+3}} \\ &= \frac{3^{2n+2}}{2^{n+4}} \\ &= \frac{3^{2n}\times 3^2}{2^{n+3}\times 2^1} \\ &= \frac{3^2}{2}u_n \\ &= \frac{9}{2}u_n \end{aligned}$$

Donc, la suite est bien une suite géométrique de raison $\frac{9}{2}$ et de premier terme $u_0 = \frac{1}{8}$.

Exercice 3 : (5 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3u_n+2} \end{cases}$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite.

Solution :

(1 point)

$u_0 = 2$, $u_1 = \frac{2u_0}{3u_0+2} = \frac{2\times 2}{3\times 2+2} = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{2u_1}{3u_1+2} = \frac{2}{7}$,$u_3 = \frac{2u_2}{3u_2+2} = \frac{1}{5}$, $u_4 = \frac{2u_3}{3u_3+2} = \frac{2}{13}$.

2. On suppose que la suite ne s'annule jamais. On pose (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = \frac{1}{u_n}.$$

a Calculer les 5 premiers termes de la suite (v_n).

Solution :

(1 point)

$v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{2}$, $v_1 = \frac{1}{u_1} = 2$, $v_2 = \frac{1}{u_2} = \frac{7}{2}$,$v_3 = \frac{1}{u_3} = 5$, $v_4 = \frac{1}{u_4} = \frac{13}{2}$.

b Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $R = \frac{3}{2}$.

Solution :

(1.5 points)

On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{1}{\frac{2u_n}{3u_n+2}} - \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{2+3u_n}{2u_n} - \frac{2}{2u_n} \\ &= \frac{2+3u_n-2}{2u_n} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Donc, la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $R = \frac{3}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{2}$.

3. En déduire l'expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.

Solution :

(1.5 points)

La suite (v_n) étant une suite arithmétique, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 + n \times R = \frac{1}{2} + n \times \frac{3}{2} = \frac{3n+1}{2}$

On sait que $v_n = \frac{1}{u_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{2}{3n+1}$

<u>Exercice 4 :</u> (7 points)

Maya possède 20 € dans sa tirelire au 1er juin 2024.

À partir de cette date, chaque mois elle dépense un quart du contenu de sa tirelire puis y place 20 € supplémentaires.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du n-ième mois. On a $u_0 = 20$.

1. Montrer que la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du 1er mois est de 35 €.

Solution :

(1 point)

Elle dépense un quart du contenu, soit 5 € ($\frac{1}{4} \times 20 = 5$...). Il reste donc 15 €

Elle rajoute 20 €, la somme est donc 35 €($20 + 15 = 35$...)

2. Calculer u_2.

Solution :

(1 point)

Elle dépense un quart du contenu, soit 8,75 € ($\frac{1}{4} \times 35 = 8,75...$). Il reste donc 26,25 € ($35 - 8.75 = 26,25$)

Elle rajoute 20 €, la somme est donc 46,25 €($20 + 26,25 = 46,25...$)

Donc $u_2 = 46,25$.

On admet que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 20$.

3. Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n - 80$.

   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,75$.

Solution :

(2 points)

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 80 \\ &= 0,75u_n + 20 - 80 \\ &= 0,75u_n - 60 \\ &= 0,75\left(u_n - \frac{60}{0,75}\right) \\ &= 0,75(u_n - 80) \\ &= 0,75v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $0,75$.

   (b) Préciser son premier terme v_0.

Solution :

(0.5 point)

On a $v_0 = u_0 - 80 = 20 - 80 = -60$.

   (c) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

Solution :

(0.5 point)

Sachant que la suite est géométrique, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$v_n = v_n q^n = -60 \times 0,75^n$.

   (d) En déduire que, pour tout entier n :

$$u_n = 80 - 60 \times 0,75^n$$

Solution :

(1 point)
Sachant que $v_n = u_n - 80 \Leftrightarrow u_n = v_n + 80 \Leftrightarrow u_n = 80 - 60 \times 0,75^n$.

(e) Déterminer, au centime près, le montant que Maya possèdera dans sa tirelire au 1er juin 2025.

Solution :

(1 point)
Douze mois se sont écoulés, on cherche donc u_{12} :
$u_{12} = 80 - 60 \times 0,75^{12} = 78,10$ arrondi au centième.
Le montant que Maya possèdera dans sa tirelire au 1er juin 2023 est donc de 78,10 €.