DS 5

Devoir sur table

(1 heure)

Exercice 1 : (5 points)

Une entreprise est composée de 3 services A, B et C d'effectifs respectifs 440, 330 et 230 employés.

Une enquête effectuée sur le temps de parcours quotidien entre le domicile des employés et l'entreprise a montré que :

20 % des employés du service A résident à moins de 30 minutes de l'entreprise ;

40 % des employés du service B résident à moins de 30 minutes de l'entreprise ;

80 % des employés du service C résident à moins de 30 minutes de l'entreprise.

On choisit au hasard un employé de cette entreprise et on considère les évènements suivants :
(Les résultats seront donnés sous forme décimale, arrondis à 10^{-3} si nécessaire.)

A : « l'employé fait partie du service A » ;

B : « l'employé fait partie du service B » ;

C : « l'employé fait partie du service C » ;

T : « l'employé réside à moins de 30 minutes de l'entreprise ».

1. (a) Justifier que $P(A) = 0,44$.

Solution :

(0,5 point)
L'expérience étant équiprobable, et sachant qu'il y a 1000 employés (440 + 330 + 230 = 1000), on a donc :
$P(A) = \dfrac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb total de cas}} = \dfrac{440}{1000} = 0,44$

(b) Donner $P_A(T)$.

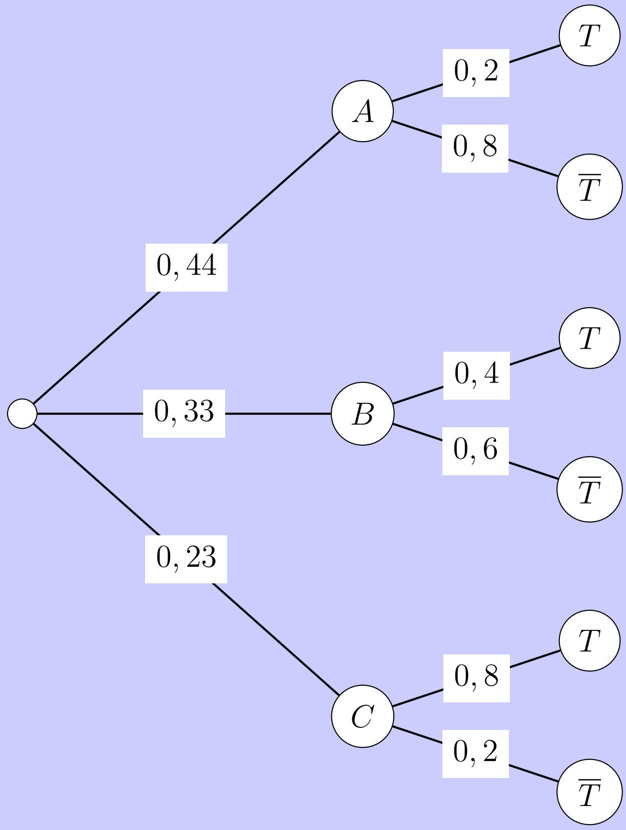
Solution :

(0,5 point)
D'après l'énoncé, $P_A(T) = 20\% = 0,2$.

(c) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré en indiquant les probabilités associées à chaque branche.

Solution :

(1 point)



2. Déterminer la probabilité que l'employé choisi soit du service A et qu'il réside à moins de 30 minutes de son lieu de travail.

Solution :

(1 point)
On cherche $P(A \cap T) = P(A) \times P_A(T) = 0,44 \times 0,2 = 0,088$.

3. Montrer que $P(T) = 0,404$.

Solution :

(1 point)
D'après la formule des probabilités totales, avec A, B et C comme partition de l'univers, on a :
$P(T) = P(A) \times P_A(T) + P(B) \times P_B(T) + P(C) \times P_C(T) = 0,44 \times 0,2 + 0,33 \times 0,4 + 0,23 \times 0,8 = 0,404$.

4. Sachant qu'un employé de l'entreprise réside à plus de 30 minutes de son lieu de travail, déterminer la probabilité qu'il fasse partie du service C.

Solution :

(1 point)

On cherche $P_{\overline{T}}(C) = \dfrac{P(\overline{T} \cap C)}{P(\overline{T})} = \dfrac{P(C) \times P_C(\overline{T})}{1 - P(T)} = \dfrac{0,23 \times 0,2}{1 - 0,404} = 0.077$ à 10^{-3} près.

Exercice 2 : (5 points)
Calculer les cinq premiers termes des suites suivantes :

1. La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = -n^2 + 3n - 1$

Solution :

(1.5 points)
$u_0 = -0^2 + 3 \times 0 - 1 = -1$
$u_1 = -1^2 + 3 \times 1 - 1 = 1$
$u_2 = -2^2 + 3 \times 2 - 1 = 1$
$u_3 = -3^2 + 3 \times 3 - 1 = -1$
$u_4 = -4^2 + 3 \times 4 - 1 = -5$

2. La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$

Solution :

(1.5 points)
$u_0 = 3$
$u_1 = 2u_0 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$
$u_2 = 2u_1 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$
$u_3 = 2u_2 - 1 = 2 \times 9 - 1 = 17$
$u_4 = 2u_3 - 1 = 2 \times 17 - 1 = 33$

3. La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1} \end{cases}$

Solution :

(2 points)
$u_0 = 2$

$$u_1 = \frac{3u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{3 \times 2 - 1}{2 + 1} = \frac{5}{3}$$

$$u_2 = \frac{3u_1 - 1}{u_1 + 1} = \frac{3 \times \frac{5}{3} - 1}{\frac{5}{3} + 1} = \frac{3}{2}$$

$$u_3 = \frac{3u_2 - 1}{u_2 + 1} = \frac{3 \times \frac{3}{2} - 1}{\frac{3}{2} + 1} = \frac{7}{5}$$

$$u_4 = \frac{3u_3 - 1}{u_3 + 1} = \frac{3 \times \frac{7}{5} - 1}{\frac{7}{5} + 1} = \frac{4}{3}$$

Exercice 3 : (4 points)
Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 3n^2 - n + 4$.

1. Montrer que, pour tout entier n :

$$u_{n+1} - u_n = 6n + 2$$

Solution :
(2 points)
$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - u_n & = & 3(n+1)^2 - (n+1) + 4 - (3n^2 - n + 4) \\ & = & 3n^2 + 6n + 3 - n - 1 + 4 - 3n^2 + n - 4 \\ & = & 6n + 2 \end{array}$$

2. En déduire la variation de la suite (u_n).

Solution :
(2 points)
Pour étudier les variations d'une suite, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.
On sait que $n \in \mathbb{N}$, donc $6n + 2 > 0$.
La suite (u_n) est donc croissante.

Exercice 4 : (6 points)
On considère une suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 8$ et de raison $R = -3$.

1. Déterminer les 4 premiers termes.

Solution :
(1 points)
$u_0 = 8$, $u_1 = u_0 + R = 8 + (-3) = 5$, $u_2 = u_1 + R = 5 + (-3) = 2$, $u_3 = u_2 + R = 2 + (-3) = -1$.

2. Déterminer le 15 ième terme de la suite.

Solution :
(1.5 points)
On cherche u_{14} :

$$\begin{array}{rcl} u_{14} & = & u_0 + 14R \\ & = & 8 + 14 \times (-3) \\ & = & -34 \end{array}$$

Donc le 15 ième terme de la suite est $u_{14} = -34$.

3. Déterminer le terme de rang 19 de la suite.

Solution :

(1.5 points)

On cherche u_{19} :

$$\begin{aligned} u_{19} &= u_0 + 19R \\ &= 8 + 19 \times (-3) \\ &= -49 \end{aligned}$$

Donc le terme de rang 19 de la suite est $u_{19} = -49$

4. Déterminer la valeur de n tel que $u_n = -100$.

Solution :

(2 points)

On cherche n tel que $u_n = -100$:

$$\begin{array}{rrcl} & u_n & = & u_0 + nR \\ \Leftrightarrow & -100 & = & 8 - 3n \\ \Leftrightarrow & -100 - 8 & = & -3n \\ \Leftrightarrow & n & = & \dfrac{-108}{-3} \\ \Leftrightarrow & n & = & 36 \end{array}$$

La valeur de n est donc 36.