DS 3

Devoir sur table

(1 heure)

Exercice 1 : (8 points)
Nous disposons d'un dé de 6 faces et d'une pièce de monnaie.
Le jeu consiste à jeter la pièce et le dé simultanément, et compter les points comme suit :

- Si la pièce tombe sur pile, le nombre de points est le double du résultat du dé.
- Si la pièce tombe sur face, le nombre de points est le résultat du dé augmenté de 2.

Exemples :

- si la pièce tombe sur pile, et le dé tombe sur 4, le nombre de points est donc de 8.
- si la pièce tombe sur face, et le dé tombe sur 5, le nombre de points est donc de 7.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

	1	2	3	4	5	6
Pile				8		
Face					7	

Solution :
(1 point)

	1	2	3	4	5	6
Pile	2	4	6	8	10	12
Face	3	4	5	6	7	8

On note :

- A : « Le résultat est pair »
- B : « Le résultat est obtenu avec la pièce sur face »
- C : « Le résultat est inférieur ou égal à 6 »

2. Déterminer la probabilité de A, B et C.

Solution :
(3 points)
L'expérience est équiprobable, les probabilités sont donc obtenues par le rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre d'éventualités de l'univers.

- $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$
- $P(B) = \dfrac{|B|}{|\Omega|} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$
- $P(C) = \dfrac{|C|}{|\Omega|} = \dfrac{7}{12}$

3. Définir par une phrase en français l'évènement $\overline{C}$. Déterminer $P(\overline{C})$.

Solution :

(1 point)

- $\overline{C}$: « Le résultat est strictement supérieur 6 ».
- $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$

4. Définir par une phrase en français l'évènement $A \cap C$. Déterminer $P(A \cap C)$.

Solution :

(1 point)

- $A \cap C$: « Le résultat est pair et inférieur ou égal à 6 ».
- $P(A \cap C) = \frac{|A \cap C|}{|\Omega|} = \frac{5}{12}$.

5. Définir par une phrase en français l'évènement $A \cup C$. Déterminer $P(A \cup C)$.

Solution :

(1 point)

- $A \cup C$: « Le résultat est pair ou inférieur ou égal à 6. ».
- $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{3}{4} + \frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \frac{11}{12}$.

6. Les évènement A et B sont-ils incompatibles ? (Justifier)

Solution :

(1 point)

L'éventualité 6 est à la fois dans A et dans B, donc les évènements ne sont pas incompatibles.

Exercice 2 : (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 17x + 84$$

1. Montrer que 4 est une racine de f.

Solution :

(1 point)

On trouve bien $f(4) = 0$...

2. Déterminer les valeurs de a, b et c telles que, pour tout réel x, on ait :

$$f(x) = (x-4)\left(ax^2 + bx + c\right)$$

Solution :

(2 points)

On a :

$$\begin{aligned}(x-4)\left(ax^2+bx+c\right) &= ax^3 + bx^2 + cx - 4ax^2 - 4bx - 4c \\ &= ax^3 + (-4a+b)x^2 + (-4b+c)x - 4c\end{aligned}$$

On cherche donc a , b, et c, avec

$2x^3 - 9x^2 - 17x + 84 = ax^3 + (-4a+b)x^2 + (-4b+c)x - 4c$

Par identification des coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} a = 2 \\ -4a + b = -9 \\ -4b + c = -17 \\ -4c = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ -8 + b = -9 \\ -4b - 21 = -17 \\ c = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ b = -1 \\ c = -21 \end{cases}$$

On trouve donc $a = 2$, $b = -1$ et $c = -21$.

On a donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-4)(2x^2 - x - 21)$.

3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
(on pourra admettre que l'on a trouvé précédemment : $f(x) = (x-4)(2x^2 - x - 21)$.)

Solution :

(2 points)

On pose $p(x) = 2x^2 - x - 21$, on a $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-21) = 169$ le polynôme p admet donc deux racines réelles : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1+13}{4} = \dfrac{7}{2} \\ x_2 = \dfrac{1-13}{4} = -3 \end{cases}$

Pour $x - 4$ qui est une forme affine, l'annulateur est : $x_3 = 4$.

On trouve $S = \left\{-3; \dfrac{7}{2}; 4\right\}$.

Exercice 3 : (7 points)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 6x^3 - x^2 - 47x + 30$$

1. Montrer que (-3) est une racine de f.

Solution :
(1 point)
$f(-3) = 6 \times (-3)^3 - \times(-3)^2 - 47 \times (-3) + 30 = -162 - 9 + 141 + 30 = 0$
Donc, (-3) est bien une racine de f.

2. Déterminer les valeurs de a, b et c telles que, pour tout réel x, on ait :

$$f(x) = (x+3)\left(ax^2 + bx + c\right)$$

Solution :
(2 points)
On a :
$$\begin{aligned}(x+3)(ax^2+bx+c) &= ax^3 + bx^2 + cx + 3ax^2 + 3bx + 3c \\ &= ax^3 + (3a+b)x^2 + (3b+c)x + 3c\end{aligned}$$
On cherche donc a , b, et c, avec

$6x^3 - x^2 - 47x + 30 = ax^3 + (3a+b)x^2 + (3b+c)x + 3c$
Par identification des coefficients, on obtient :
$$\begin{cases} a = 6 \\ 3a + b = -1 \\ 3b + c = -47 \\ 3c = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ 18 + b = -1 \\ 3b + 10 = -47 \\ c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -19 \\ b = -19 \\ c = 10 \end{cases}$$
On trouve donc $a = 6$, $b = -19$ et $c = 10$.
On a donc :
$$f(x) = (x+3)\left(6x^2 - 19x + 10\right)$$

3. On pourra admettre ici que l'on a, pour tout x réel, $f(x) = (x+3)(6x^2 - 19x + 10)$.

   (a) Résoudre l'équation $6x^2 - 19x + 10 = 0$.

Solution :
(1 points)
On pose $p(x) = 6x^2 - 19x + 10$, on a $\Delta = (-19)^2 - 4 \times 6 \times 10 = 121$ le polynôme
p admet donc deux racines réelles : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{19+11}{12} = \dfrac{5}{2} \\ x_2 = \dfrac{19-11}{12} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

Donc on trouve : $\boxed{S = \left\{\frac{5}{2}; \frac{2}{3}\right\}}$

(b) Résoudre, à l'aide d'un tableau de signes, l'inéquation $f(x) > 0$.

Solution :

(3 points)

Pour $x+3$ qui est une forme affine, l'annulateur est : $x_3 = -3$.

Connaissant les annulateurs de la question précédente, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		$\frac{2}{3}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$p(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc on a $\boxed{S = \left]-3; \frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{5}{2}; +\infty;\right[}$