DS 2

Devoir sur table

(1 heure)

Exercice 1 : (6 points)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $3x^2 + 13x - 10 = 0$

Solution :

On pose $p(x) = 3x^2 + 13x - 10$, on a $\Delta = b^2 - 4ac = 13^2 - 4 \times 3 \times (-10) = 289$ le polynôme p admet donc deux racines réelles :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-13+17}{6} = \dfrac{2}{3} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-13-17}{6} = -5 \end{array}\right.$$

On trouve donc $\boxed{S = \left\{\frac{2}{3}; -5\right\}}$

(b) $9x^2 + 4 = 0$

Solution :

On pose $p(x) = 9x^2 + 4$, on a $\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \times 9 \times 4 = -144$ le polynôme p n'admet donc pas de racines réelles ,on trouve donc $\boxed{S = \emptyset}$

(c) $16x^2 - 40x + 25 = 0$

Solution :

On pose $p(x) = 16x^2 - 40x + 25$, on a $\Delta = b^2 - 4ac = (-40)^2 - 4 \times 16 \times 25 = 0$ le polynôme p admet une unique racine réelle :

$x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{40}{32} = \dfrac{5}{4}$

On trouve donc $\boxed{S = \left\{\frac{5}{4}\right\}}$

Exercice 2 : (4 points)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $3x(2x - 5) = 5x - 6$

Solution :

On a :

$$\begin{aligned} 3x(2x-5)=5x-6 &\Leftrightarrow & 6x^2-15x=5x-6 \\ &\Leftrightarrow & 6x^2-15x-5x+6=0 \\ &\Leftrightarrow & 6x^2-20x+6=0 \end{aligned}$$

On pose $p(x)=6x^2-20x+6$, on a $\Delta=b^2-4ac=(-20)^2-4\times6\times6=256$ le polynôme p admet donc deux racines réelles :

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{20+16}{12}=3 \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{20-16}{12}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

On trouve donc $\boxed{S=\left\{\dfrac{1}{3};3\right\}}$

(b) $\dfrac{1}{2}(x^2-4)=-x(x-1)+6$

Solution :

On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x^2-4)=-x(x-1)+6 &\Leftrightarrow & \frac{1}{2}x^2-2=-x^2+x+6 \\ &\Leftrightarrow & \frac{1}{2}x^2+x^2-x-2-6=0 \\ &\Leftrightarrow & \frac{3}{2}x^2-x-8=0 \end{aligned}$$

On pose $p(x)=\dfrac{3}{2}x^2-x-8$, on a $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times\dfrac{3}{2}\times(-8)=49$ le polynôme p admet donc deux racines réelles :

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1+7}{3}=\dfrac{8}{3} \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1-7}{3}=-2 \end{cases}$$

On trouve donc $\boxed{S=\left\{\dfrac{8}{3};-2\right\}}$

Exercice 3 : (6 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes (on donnera le tableau de signes des polynômes) :

(a) $6x^2+26x-20>0$

Solution :

On note $p(x)=6x^2+26x-20$.
On a $\Delta=b^2-4ac=(26)^2-4\times6\times(-20)=1156$
Donc le polynôme admet deux racines :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-26+\sqrt{1156}}{2\times 6} = \dfrac{2}{3} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-26-\sqrt{1156}}{2\times 6} = -5 \end{cases}$$

On obtient donc le tableau de signe :

x	$-\infty$		-5		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$p(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $\boxed{S =]-\infty, -5[\cup \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[}$

(b) $3x^2 - 13x + 14 \leqslant 0$

Solution :

On note $p(x) = 3x^2 - 13x + 14$.
On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4 \times 3 \times (14) = 1$
Donc le polynôme admet deux racines :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{13+\sqrt{1}}{2\times 3} = \dfrac{7}{3} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{13-\sqrt{1}}{2\times 6} = 2 \end{cases}$$

On obtient donc le tableau de signe :

x	$-\infty$		2		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$p(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $\boxed{S = \left[2, \frac{7}{3}\right]}$

(c) $-9x^2 + 12x - 4 < 0$

Solution :

On note $p(x) = -9x^2 + 12x - 4$.
On a $\Delta = b^2 - 4ac = (12)^2 - 4 \times (-9) \times (-4) = 0$
Donc le polynôme admet une unique racine :

$x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-12}{2\times(-9)} = \dfrac{2}{3}$

.

On obtient donc le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$p(x)$		$-$	0	$-$	

On a donc : $\boxed{S = \left]-\infty, \frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[}$

Exercice 4 : (4 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes (on donnera le tableau de signes des polynômes) :

(a) $2x(x+3) \leq 4x+12$

Solution :

$2x(x+3) \leq 4x+12 \Leftrightarrow 2x^2+6x-4x-12 \leq 0 \Leftrightarrow 2x^2+2x-12 \leq 0$ On note $p(x) = 2x^2+2x-12$.

On a $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 2 \times (-12) = 100$

Donc le polynôme admet deux racines :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+10}{4} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-10}{4} = -3 \end{cases}$$

On obtient donc le tableau de signe :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$p(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $\boxed{S = [-3, 2]}$

(b) $(2x+1)^2 \leqslant 5(4x-3)$

Solution :

$(2x+1)^2 \leq 5(4x-3) \Leftrightarrow 4x^2+4x+1 \leq 20x-15 \Leftrightarrow 4x^2-16x+16 \leq 0$ On note $p(x) = 4x^2-16x+16$.

On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-16)^2 - 4 \times 4 \times 16 = 0$

Donc le polynôme admet une unique racine :

$x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{16}{2 \times (4)} = 2$

On obtient donc le tableau de signe :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$p(x)$		$+$	0	$+$	

On a donc : $\boxed{S = \{2\}}$