DS 10

Devoir sur table

(2 heures)

Nom :........................
Prénom :........................

Exercice 1 : (3 points)
Simplifier les expressions suivantes

1. $A = \dfrac{e^{-5}e^{2}}{e^{-4}}$

Solution :
(1.5 points)
$A = \dfrac{e^{-5}e^{2}}{e^{-4}} = \dfrac{e^{-5+2}}{e^{-4}} = \dfrac{e^{-3}}{e^{-4}} = e^{-3+4} = e^{1} = e$

2. $B = \dfrac{(e^{2})^{5}}{(e^{-4})^{3}}$

Solution :
(1.5 points)
$B = \dfrac{(e^{2})^{5}}{(e^{-3})^{4}} = \dfrac{e^{2\times 5}}{e^{(-3)\times 4}} = \dfrac{e^{10}}{e^{-12}} = e^{10+12} = e^{22}$

Exercice 2 : (2 points)
Montrer que, pour tous réels x :

$$\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)^2 - \left(e^{2x}-e^{-2x}\right)^2 = 4$$

Solution :
Il suffit de développer :

$$\begin{aligned}(e^{2x}+e^{-2x})^2-(e^{2x}-e^{-2x})^2 &= e^{4x}+2e^{0}+e^{-4x}-(e^{4x}-2e^{0}+e^{-4x})\\ &= e^{4x}+2+e^{-4x}-e^{4x}+2-e^{-4x}\\ &= 4\end{aligned}$$

Exercice 3 : (2 points)
Résoudre les équations suivantes :

(a) $e^{2x-1} = e^{5x-10}$

Solution :

(1 points)

$$\begin{aligned} e^{2x-1}=e^{5x-10} &\Leftrightarrow \ln\left(e^{2x-1}\right)=\ln\left(e^{5x-10}\right)\\ &\Leftrightarrow 2x-1=5x-10\\ &\Leftrightarrow -3x=-9\\ &\Leftrightarrow x=\frac{-9}{-3}\\ &\Leftrightarrow x=3 \end{aligned}$$

On trouve donc $\boxed{S=\{3\}}$

(b) $e^{-3x+2}=-5$

Solution :

(1 point)

On sait que, pour tout x réel, on a $e^{-3x+2}>0$, l'équation est donc impossible, elle n'a pas de solution : $\boxed{S=\emptyset}$

Exercice 4 : (3 points)

On considère l'équation suivante :

$$(E) \quad e^{3x^2-5}=\left(e^{x+1}\right)^5 e^{8x}$$

1. Montrer que :

$$\left(e^{x+1}\right)^5 e^{8x}=e^{13x+5}$$

Solution :

(1 point)

On a :

$$\begin{aligned} \left(e^{x+1}\right)^5 e^{8x} &= e^{5x+5}e^{8x}\\ &= e^{5x+5+8x}\\ &= e^{13x+5} \end{aligned}$$

2. Résoudre l'équation (E)

Solution :

(2 points)

On a :

$$\begin{aligned} e^{3x^2-5}=\left(e^{x+1}\right)^5 e^{8x} &\Leftrightarrow \ln\left(e^{3x^2-5}\right)=\ln\left(e^{13x+5}\right)\\ &\Leftrightarrow 3x^2-5=13x+5\\ &\Leftrightarrow 3x^2-13x-10=0 \end{aligned}$$

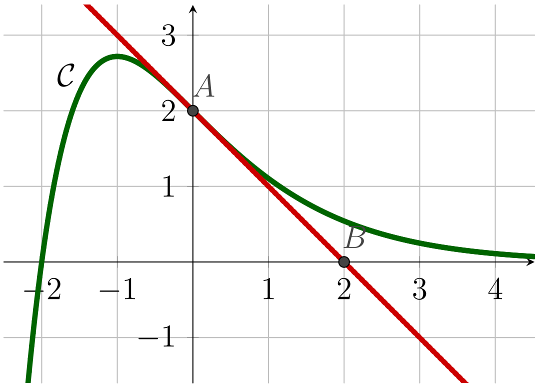
On résout alors l'équation du second degrés : $\Delta=(-13)^2-4\times 3\times(-10)=289$.

Il y a donc deux racines réelles :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{13+17}{6} = \dfrac{30}{6} = 5 \\ x_2 = \dfrac{13-17}{6} = \dfrac{-4}{6} = -\dfrac{2}{3} \end{cases} \quad \text{Donc } \boxed{S = \left\{5; -\dfrac{2}{3}\right\}}$$

Exercice 5 : (7 points)

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



On considère les points $A(0\ ;\ 2)$ et $B(2\ ;\ 0)$.

Partie 1

Sachant que la courbe $\mathcal{C}$ passe par A et que la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A, et que la tangente au point d'abscisse (-1) est horizontale, donner par lecture graphique (on justifiera les réponses) :

1. La valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.

Solution :

(2 points)
Sachant que $A(0\ ;\ 2)$ est un point de la courbe, donc $f(0) = 2$.
Le coefficient directeur de la tangente (AB) est -1 (par le calcul de $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -1$), on a donc $f'(0) = -1$.

2. La valeur de $f'(-1)$.

Solution :

(1 points)
La tangente en (-1) est horizontale, donc la dérivée s'annule : $f'(-1) = 0$.

3. Un intervalle sur lequel la fonction f' est positive.

Solution :

La fonction est croissante sur $]-\infty;-1[$, donc sur cette intervalle, la fonction f' est positive.

Partie 2

On admet que pour tout nombre réel x, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

Solution :

(1.5 points)

La fonction est dérivable comme produit de fonctions dérivables, et on a, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x+2) \times (-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= (1 + (x+2) \times (-1))\,\mathrm{e}^{-x} \\ &= (1 - x - 2)\,\mathrm{e}^{-x} \\ &= (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

On retrouve bien ce qui était attendu.

2. Compléter le le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.(On ne précisera ni la limite de f en $-\infty$ ni la limite de f en $+\infty$.)

Solution :

(1 points)

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
e^{-x}		$+$		$+$	
$-x-1$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	0

3. Déterminer la valeur exacte de l'extremum de f sur $\mathbb{R}$.

Solution :

(0.5 points)

Le maximum est atteint pour $x = -1$:

$f(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^{-(-1)} = \mathrm{e}$.

Le maximum est donc e.

Exercice 6 : (3 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = 3n + 1$$

1. Montrer que la suite (u_n) est une suite arithmétique. (On donnera le premier terme et la raison de la suite.)

Solution :

(1 points)

On a :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - u_n & = & 3(n+1) + 1 - (3n+1) \\ & = & 3n + 3 + 1 - 3n - 1 \\ & = & 3 \end{array}$$

On a la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 3. Son premier terme est $u_0 = 3 \times 0 + 1 = 1$.

2. On pose, pour tout entier n :

$$v_n = e^{2u_n}$$

Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. (On donnera le premier terme et la raison de la suite.)

Solution :

(2 points)

On a :

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} & = & e^{2u_{n+1}} \\ & = & e^{2(u_n+3)} \\ & = & e^{2u_n} e^6 \\ & = & e^6 v_n \end{array}$$

On a la suite (v_n) est une suite géométrique de raison e^6. Son premier terme est $v_0 = e^{2u_0} = e^2$.