TD 4

Correction et terminaison

Correction

Exercice 1 :

1. Écrire la fonction récursive `fact`, , calculant la valeur de factoriel de n placé en argument.

   `fact : int -> int`

   Correction

   Listing 1 – La fonction `der`

```
let rec fact n =
  if n = 0 then 1 else n * fact (n-1);;
```

2. Prouver la terminaison de la fonction.

   Correction

   On travaille sur $\mathbb{N}$, avec la relation d'ordre usuel (qui est bien fondé).
   Le seul élément minimal est 0.

   - Pour $n = 0$, la fonction se termine.
   - Pour n non nul, on a $\texttt{fact}(n) = n * \texttt{fact}(n-1)$, la fonction fait donc appelle à $\texttt{fact}(n-1)$, avec $n - 1 < n$.

   Conclusion, d'après le théorème de terminaison, la fonction `fact` se termine pour tout entier n.

Exercice 2 :
On considère la fonction suivante :

```
let rec binome n p = match (n, p) with
| n, 0 -> 1
| n, p -> if  (p>n) then 0 else binome (n-1) p + binome (n-1) (p-1);;
```

Prouver la terminaison de la fonction.

Correction

On travaille sur $\mathbb{N}^2$, avec la relation d'ordre lexicographique (qui est bien fondé).
Le seul élément minimal est (0,0).

- Pour $(n, p) = (0, 0)$, la fonction se termine.
- Pour $(n, p) \neq (0, 0)$:
  - Si $p = 0$, la fonction se termine.
  - Si $p > n$, la fonction se termine.

   - Sinon, la fonction fait donc appelle à binome$((n-1),p)$, avec $(n-1,p)<(n,p)$ et à binome$((n-1),(p-1))$, avec $(n-1,p-1)<(n,p)$

Conclusion, d'après le théorème de terminaison, la fonction binome se termine pour tout couple $(n,p)\in\mathbb{N}^2$.

Exercice 3 :

On considère la fonction suivante :

```
let rec ackermann n p = match (n, p) with
| 0, p -> p + 1
| n, 0 -> ackermann (n - 1) 1
| n, p -> ackermann (n - 1) (ackermann n (p - 1));;
```

Prouver la terminaison de la fonction.

Correction

On travaille sur $\mathbb{N}^2$, avec la relation d'ordre lexicographique (qui est bien fondé).
Le seul élément minimal est (0,0).

- Pour $(n,p)=(0,0)$, la fonction se termine.
- Pour $(n,p)\neq(0,0)$:
   - Si $n=0$, la fonction se termine.
   - Sinon, si $p=0$, la fonction fait appelle à ackermann$(n-1,p)$, avec $(n-1,p)<(n,p)$.
   - Sinon, la fonction fait donc appelle à ackermann$(n,p-1)$, avec $(n,p-1)<(n,p)$. Notons $k=$ ackermann$(n,p-1)$, la fonction fait appelle à ackermann$((n-1),k)$, avec $(n-1,k)<(n,p)$

Conclusion, d'après le théorème de terminaison, la fonction ackermann se termine pour tout couple $(n,p)\in\mathbb{N}^2$.

Exercice 4 :

On appelle inversion paire d'une liste d'entier non vide de longueur paire deux éléments successifs tels que :

- Le premier d'entre eux est situé en position paire (en partant de la position 0).
- Le premier est strictement supérieur au second.

Par exemple :

```
let l_1 = [ 3;7;1;5;9;2;5;4];;
let l_2 = [ 3;7;1;5;4;8;1;3];;
```

`l_1` a une inversion paire, mais pas `l_2`

1. Écrire la fonction `a_une_inversion` qui teste la présence d'une inversion paire d'une liste d'entier non vide de longueur paire.

   Correction

Listing 2 – La fonction der

```
let rec a_une_inversion liste =
  match liste with
  | [] -> false
  | a::[] -> failwith "liste␣de␣taille␣impaire"
  | a::b::reste-> a>b || ( a_une_inversion reste )
  ;;
```

2. Prouver la fonction.

Correction

On travaille sur $\mathbb{N}$, muni de la relation d'ordre usuelle.
Notons $\mathcal{P}_n$ = « La fonction `a_une_inversion` se termine pour toute liste de taille n et renvoie la présence d'une inversion paire. ».
Montrons $\mathcal{P}_n$ pour tout n :

- Le prédicat est vraie pour 0, qui est l'élément minimal.
- Pour $n > 0$. Soit l une liste de taille n. Notons $l = [a_1, a_2, ..., a_n]$.
  - Si $n = 1$, la fonction se termine, et renvoie une erreur. Ce cas ne devrait pas arriver...
  - Sinon, si $a > b$, la fonction se termine et renvoie vraie. Sinon, supposons que $\mathcal{P}_m$ soit vraie pour tout entier $m < n$. Pour `reste` $= [a_3, .., a_n]$, on a $|$`reste`$| < n$, donc la fonction se termine pour `reste` et renvoie le résultat attendu.

Donc, par preuve par induction, la fonction se termine et renvoie bien le résultat attendu.