

TD 10

Logique

Exercice 1 : Montrer que la longueur d'une proposition F qui comporte $b(F)$ occurrences de symboles de connecteurs binaires et $n(F)$ occurrences du symbole de négation est :

$$|F| = 4b(F) + n(F) + 1$$

(par exemple : pour $F = ((a \wedge b) \vee (\neg c \wedge d))$)

Exercice 2 : Vous êtes perdu sur une piste dans le désert. Vous arrivez à une bifurcation. Chacune des deux pistes est gardée par un sphinx que vous interroger. Les pistes peuvent soit conduire à une oasis, soit se perdre dans un désert profond (au mieux elles conduisent toutes à une oasis, au pire elles se perdent toutes les deux).

Vous disposez des informations suivantes :

- A : Le sphinx de droite vous répond : Une au moins des deux pistes conduit à une oasis.
- B : Le sphinx de gauche vous répond : La piste de droite se perd dans le désert.
- C : Vous savez que les deux sphinx disent tous les deux la vérité, ou bien mentent tous les deux.

1. Si D est la proposition « *Il y a une oasis au bout de la route de droite* » et si G est la proposition « *Il y a une oasis au bout de la route de gauche* », alors :

- (a) Exprimer par une formule de la logique propositionnelle les affirmations A et B.
- (b) Exprimer alors la connaissance C.

2. Résoudre l'énigme.

Exercice 3 : Une nouvelle série de composants informatiques dédiés au raisonnement logique a été conçue de manière à faciliter la détection de pannes.

Chaque processeur effectue des raisonnements logiques et peut être, soit en état de fonctionnement normal, soit en état de panne. Il se comporte alors de la manière suivante :

- un processeur en état de fonctionnement normal ne peut affirmer que des propositions vraies ;
- un processeur en état de panne ne peut affirmer que des propositions fausses.

Un ordinateur est composé de trois processeurs qui possèdent la même mémoire, donc les mêmes connaissances. Périodiquement, un ingénieur vient interroger l'ordinateur pour déterminer si certains processeurs sont en état de panne. Lors d'une séance de test, l'ingénieur pose les deux questions suivantes au processeur $n^{\circ} 1$:

- « Est-ce que les processeurs $n^{\circ} 2$ et $n^{\circ} 3$ sont en état de fonctionnement normal ? »
- « Est-ce que le processeur $n^{\circ} 2$ est en état de fonctionnement normal ? »

Le processeur $n^{\circ} 1$ répond à la première question : « Les processeurs $n^{\circ} 2$ et $n^{\circ} 3$ sont en état de fonctionnement normal. »

Puis, il répond à la seconde question : « Le processeur $n^{\circ} 2$ est en état de panne. »

Nous noterons $P1$ (respectivement $P2$ et $P3$) la proposition « le processeur $n^{\circ} 1$ (respectivement $n^{\circ} 2$ et $n^{\circ} 3$) est en état de panne »

Nous supposons que l'état des trois processeurs ne peut pas changer entre les réponses aux deux questions.

1. Exprimer la réponse à la première question sous la forme d'une formule du calcul des propositions.
2. Exprimer la réponse à la deuxième question sous la forme d'une formule du calcul des propositions.
3. En utilisant le calcul des propositions (table de vérité ou formule de De Morgan), déterminer l'état de chaque processeur.

Exercice 4 : La civilisation Atlante est célèbre pour son niveau scientifique et son goût pour les énigmes logiques.

Chaque laboratoire Atlante protégeait ses découvertes par une énigme.

Pour accéder aux découvertes d'un laboratoire, il fallait répondre correctement à l'énigme. Si la solution proposée était incorrecte le contenu du laboratoire était détruit. L'interprétation des énigmes (c'est-à-dire les valeurs de vérité associées à chaque proposition composant une énigme) était gérée par des règles propres à chaque laboratoire. Ces règles étaient inscrites sur le seuil de chaque laboratoire. Un groupe d'archéologues vient de mettre à jour la porte d'un laboratoire Atlante dont le contenu est intact.

Sur son seuil figure l'inscription suivante :

Les propositions composant une énigme sont alternativement vraies et fausses,
c'est-à-dire que :

- soit les propositions de numéro pair sont vraies et les propositions de numéro impair fausses,
- soit les propositions de numéro pair sont fausses et les propositions de numéro impair vraies.

Les archéologues arrivent au sas conduisant aux découvertes du laboratoire. Sur la porte se trouvent deux leviers en position haute étiquetés A et B ainsi que les trois propositions suivantes :

- $P1$: « Il faut baisser le levier A . »
- $P2$: « Il faut baisser simultanément les leviers A et B . »
- $P3$: « Il ne faut pas baisser le levier B . »

1. Exprimer $P1$, $P2$ et $P3$ sous la forme de formules du calcul des propositions dépendant de A et de B .
2. Exprimer la règle figurant sur le seuil de la porte de laboratoire dans le contexte des propositions $P1$, $P2$ et $P3$.
3. En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les formules de De Morgan ou table de vérité), déterminer l'action à effectuer pour ouvrir la porte du sas sans détruire le contenu du laboratoire.