TD 2

Déduction naturelle

Correction

Exercice 1 :

Donner pour chacun des séquents suivants la formule associée puis déterminer leur validité.

Correction

Un séquent est valide si toute interprétation qui rend vraies les formules de gauche rend vraie au moins une formule à droite. Elle n'est pas valide dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsqu'il existe une interprétation qui rend vraies toutes les formules de gauche et fausses toutes les formules de droites.

On n'utilisera pas de preuve mais on s'appuiera sur des équivalences entre formules pour montrer la validité et sur des contre-exemples pour la non-validité

(a) $p \wedge \neg p \vdash$

Correction

$p \wedge \neg p \vdash \equiv p \wedge \neg p \vdash \perp \equiv p \wedge \neg p \Rightarrow \perp$

Donc, le séquent est valide.

(b) $(p \vee q \Rightarrow r), \neg(p \wedge z) \vdash \neg p, \neg z$

Correction

La formule associée est $(p \vee q \Rightarrow r) \wedge \neg(p \wedge z) \Rightarrow \neg p \vee \neg z$. le séquent est valide car $\neg(p \wedge z) \equiv \neg p \vee \neg z$ donc toute interprétation qui rend vraie l'hypothèse $\neg(p \wedge z)$ rend vraie $\neg p \vee \neg z$ et donc rend vraie au moins une des conclusions $\neg p$ ou $\neg z$.

(c) $p \vee q \vdash p \Rightarrow r$

Correction

La formule associée est $p \vee q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$. le séquent est invalide en prenant comme interprétation p vraie et r faux, la formule de gauche est vraie, et la formule de droite est fausse.

(d) $\vdash$

Correction

La formule associée $\top \vdash \perp$ qui est toujours fausse donc le séquent est non valide.

(e) $\perp \vdash$

Correction

La formule associée est $\perp \Rightarrow \perp$ qui est toujours vraie donc le séquent est valide.

Exercice 2 :

On considère les hypothèses :

- $H_1 := p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$.

- $H_2 := q$

et la conclusion :
$C := p \Rightarrow r$.

Montrer la validité du séquent : $H_1, H_2 \vdash C$:

1. En utilisant la table de vérité.

Correction

On ne se contente que des lignes rendant vraie les propositions de gauche :

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	
1	1	1	1	1	1

2. En utilisant les règles de déductions.

Correction

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q, p \vdash p, r}\,(ax)}{q \vdash p, p \Rightarrow r}\,\Rightarrow_i \qquad \dfrac{\dfrac{}{q \vdash q, p \Rightarrow r}\,(ax) \qquad \dfrac{\dfrac{}{r, q, p \vdash r}\,(ax)}{r, q \vdash p \Rightarrow r}\,\Rightarrow_i}{(q \Rightarrow r), q \vdash p \Rightarrow r}\,\Rightarrow_h}{p \Rightarrow (q \Rightarrow r), q \vdash p \Rightarrow r}\,\Rightarrow_h$$

<u>Exercice 3 :</u>
En utilisant les règles de déductions, montrer la validité des séquents suivants :

(a) $\vdash A \Rightarrow A$

Correction

$$\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}(ax)}{A \Rightarrow A}(\Rightarrow_i)$$

(b) $\vdash \neg A \vee A$

Correction

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}(ax)}{\vdash \neg A, A}(\neg)}{\vdash \neg A \vee A}(\vee)$$

Exercice 4 :

1. Déterminer la dérivation de : $\neg A \vee B \Rightarrow A \Rightarrow B$. Correction

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, \vdash A, B}(ax)}{\neg A, A \vdash B}\vee_h \qquad \dfrac{}{B, A \vdash B}(ax)}{\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B}\vee_h}{\vdash \neg A \vee B \Rightarrow (A \Rightarrow B)}\Rightarrow_i$$

2. Déterminer la dérivation de : $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A \vee B$. Correction

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, \vdash A, B}(ax) \qquad \dfrac{}{A, B \vdash B}(ax)}{A, A \Rightarrow B \vdash B}\Rightarrow_h}{A \Rightarrow B \vdash \neg A, B}\neg_i}{A \Rightarrow B \vdash \neg A \vee B}\vee_i}{\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A \vee B}\Rightarrow_i$$

Exercice 5 :
Déterminer la dérivation de :

$$(p \vee q) \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$$

Correction

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(p \vee q) \Rightarrow r, p \vdash (p \vee q) \Rightarrow r}(ax) \qquad \dfrac{\dfrac{}{(p \vee q) \Rightarrow r, p \vdash p}(ax)}{(p \vee q) \Rightarrow r, p \vdash p \vee q}(\vee_i)}{(p \vee q) \Rightarrow r, p \vdash r}(\Rightarrow_e)}{(p \vee q) \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r}(\Rightarrow_i)$$

Exercice 6 :
Déterminer la dérivation de :

$$\vdash (p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

Correction

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \Rightarrow q \wedge r, p \vdash p \wedge r}(ax) \qquad \dfrac{}{p \Rightarrow q \wedge r, p \vdash p}(ax)}{p \Rightarrow q \wedge r, p \vdash q \wedge r}(\Rightarrow_e)}{p \Rightarrow q \wedge r, p \vdash q}(\wedge_e)}{p \Rightarrow q \wedge r \vdash p \Rightarrow q}(\Rightarrow_i)}{\vdash (p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow q)}(\Rightarrow_i)$$

Exercice 7 :
Déterminer la dérivation de :

$$A \vdash B \Rightarrow (A \wedge B)$$

Correction

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, B \vdash A}(ax) \qquad \dfrac{}{A, B \vdash B}(ax)}{A, B \vdash A \wedge B}\wedge_i}{A \vdash B \Rightarrow (A \wedge B)}\Rightarrow_i$$

Exercice 8 :
En appliquant les règles de dérivation, montrer que le séquent suivant n'est pas valide :

$$r, s \vdash (r \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)) \wedge ((q \vee \neg p) \Rightarrow r)$$

Correction

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{r,s\vdash p,q}}{r,s,\neg p\vdash q}\,\neg_h}{r,s\vdash \neg p\Rightarrow q}\,\Rightarrow_i}{r,s\vdash r\Rightarrow(\neg p\Rightarrow q)}\,\Rightarrow_i \qquad \dfrac{\dfrac{}{r,s,(q\vee\neg p)\vdash r}\,(ax)}{r,s\vdash (q\vee\neg p)\Rightarrow r}\,\Rightarrow_i}{r,s\vdash (r\Rightarrow(\neg p\Rightarrow q))\wedge((q\vee\neg p)\Rightarrow r)}\,\wedge_i$$

Or le séquent $r,s\vdash p,q$ n'est pas valide : prendre l'interprétation dans laquelle r et s sont vrais mais q et p sont faux.

Exercice 9 :

Soit le raisonnement suivant :

- Quand il fait soleil, je mets mes lunettes ou je ne sors pas.
- Je ne reste à la maison que sans lunettes et par temps gris.

Donc si je ne mets pas mes lunettes, c'est qu'il fait gris.

1. Formaliser ce raisonnement par un séquent en utilisant les variables suivantes : s : « il fait soleil » , l : « je mets mes lunettes » , m : « je reste à la maison. »
2. Montrer que le raisonnement ci-dessus est correct :
   - en utilisant la table de vérité ;
   - en utilisant la dérivation du séquent.

Correction

On obtient le séquent suivant :

$$((s\Rightarrow(l\vee m)),(m\Rightarrow(\neg l\wedge\neg s)))\vdash(\neg l\Rightarrow\neg s)$$

La table de vérité :

s	l	m	$l\vee m$	$s\Rightarrow l\vee m$	$\neg l\wedge\neg s$	$m\Rightarrow\neg l\wedge\neg s$	$\neg l\Rightarrow\neg s$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0			
1	0	1	1	1	0	0	
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0	

Par dérivation :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{m\Rightarrow(\neg l\wedge\neg s),\neg l,s\vdash s}\,(ax)}{m\Rightarrow(\neg l\wedge\neg s),\neg l\vdash s,\neg s}\,\neg_i}{m\Rightarrow(\neg l\wedge\neg s)\vdash s,\neg l\Rightarrow\neg s}\,\Rightarrow_i \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{l\vdash l,m,\neg s}\,(ax)}{l,\neg l\vdash m,\neg s}\,\neg_h}{l\vdash m,\neg l\Rightarrow\neg s}\,\Rightarrow_i \quad \dfrac{}{m\vdash m,\neg l\Rightarrow\neg s}\,(ax)}{(l\vee m)\vdash m,\neg l\Rightarrow\neg s}\,\vee_h \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{l\vee m,\neg l,\neg s\vdash\neg s}\,(ax)}{l\vee m,\neg l,\neg s\vdash\neg l\Rightarrow\neg s}\,\Rightarrow_i}{l\vee m,\neg l\wedge\neg s\vdash\neg l\Rightarrow\neg s}\,\wedge_h}{l\vee m,m\Rightarrow(\neg l\wedge\neg s)\vdash\neg l\Rightarrow\neg s}\,\Rightarrow_h}{s\Rightarrow(l\vee m),m\Rightarrow(\neg l\wedge\neg s)\vdash\neg l\Rightarrow\neg s}\,\Rightarrow_h$$