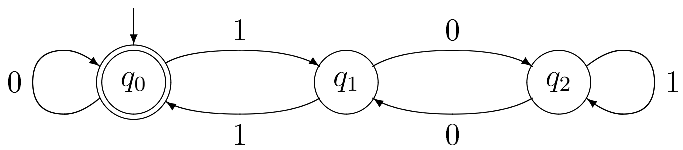
TD 11

# Automates

## Correction

Exercice 1 : On considère l'alphabet $\Sigma = \{0; 1\}$.

1. Démontrer que l'automate suivant reconnait les entiers $n$ écrits en base 2, qui sont divisibles par 3.



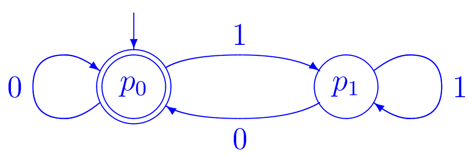

Preuve

Nous allons montrer que cet automate reconnait les entiers $n$ qui sont divisibles par 3. Plus précisément, nous allons montrer par récurrence sur $n$ que l'état final atteint par la lecture de l'entier $n$ est $q_0$ si $n \equiv 0[3]$, $q_1$ si $n \equiv 1[3]$ et $q_2$ si $n \equiv 2[3]$.

- C'est vrai si $n = 0$ ;
- si $n \geq 1$, supposons le résultat acquis jusqu'au rang $n-1$, et posons $n = 2p+r$ avec $r \in \{0, 1\}$.
  Par hypothèse de récurrence appliquée à $p$, avant la lecture de $r$ l'automate se trouve dans l'état $q_i$ avec $p \equiv i[3]$.
  - Si $i = 0$ , on a $p \equiv 0[3]$, donc $n \equiv r[3]$ :
    * si $r = 0$ l'automate reste à l'état $q_0$.
    * si $r = 1$ l'automate passe à l'état $q_1$ ;
  - Si $i = 1$ , on a $p \equiv 1[3]$, donc $n \equiv 2 + r[3]$ :
    * si $r = 0$ l'automate passe à l'état $q_2$.
    * si $r = 1$ l'automate passe à l'état $q_0$ ;
  - Si $i = 2$ , on a $p \equiv 2[3]$, donc $n \equiv 1 + r[3]$ :
    * si $r = 0$ l'automate passe à l'état $q_1$.
    * si $r = 1$ l'automate reste à l'état $q_2$ ;

Dans les trois cas le résultat est acquis au rang $n$.

2. Déterminer un automate qui reconnait les entiers $n$ écrits en base 2, qui sont divisibles par 2. Preuve



3. En déduire un automate qui reconnait les entiers $n$ écrits en base 2, qui sont divisibles par 6.

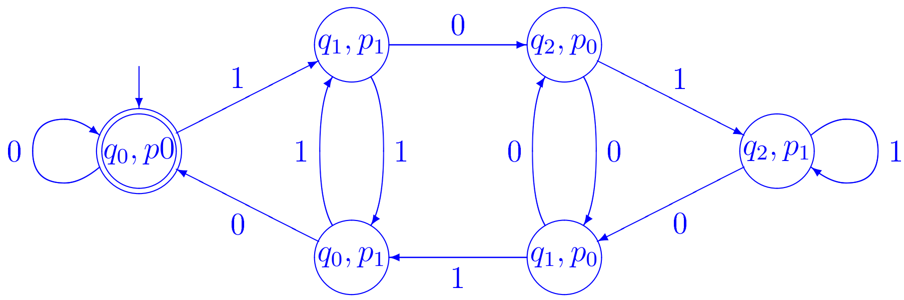
Preuve

Il suffit de construire le produit cartésien des deux automates :
On appelle produit cartésien de $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}''$ l'automate défini par :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}' \times \mathcal{A}'' = (Q' \times Q'', A, E, I' \times I'', T' \times T'')$$

avec $E = \{((p', p''), a, (q', q'')) \,|\, (p', a, q') \in E' \text{ et } (p'', a, q'') \in E''\}$
On a alors $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}') \cap L(\mathcal{A}'')$. Ainsi la table de transition est :

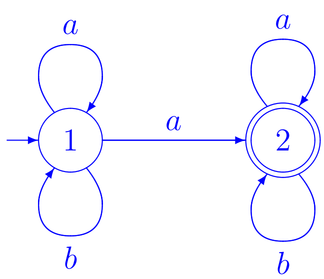
| | $(q_0, p_0)$ | $(q_0, p_1)$ | $(q_1, p_0)$ | $(q_1, p_1)$ | $(q_2, p_0)$ | $(q_2, p_1)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $(q_0, p_0)$ | $(q_0, p_0)$ | $(q_2, p_0)$ | $(q_2, p_0)$ | $(q_1, p_0)$ | $(q_1, p_0)$ |
| 1 | $(q_1, p_1)$ | $(q_1, p_1)$ | $(q_0, p_1)$ | $(q_0, p_1)$ | $(q_2, p_1)$ | $(q_2, p_1)$ |




Exercice 2 :

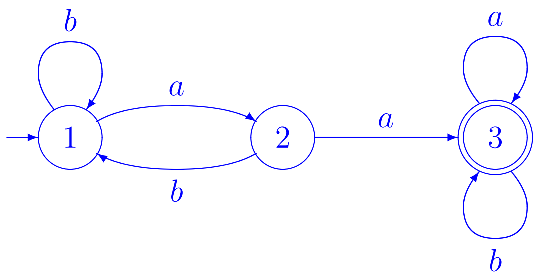
1. Trouver un automate qui reconnaît l'ensemble des mots sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ qui ont au moins une fois la lettre $a$.

Preuve



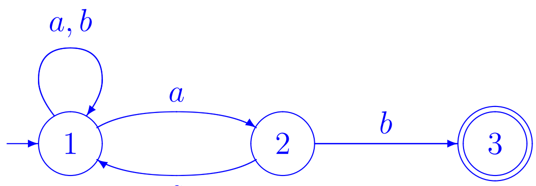

2. Trouver un automate qui reconnaît l'ensemble des mots sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ qui contiennent le facteur $aa$.

Preuve



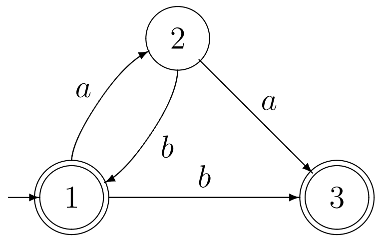

3. Trouver un automate qui reconnaît l'ensemble des mots sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ qui se terminent par $ab$.

Preuve




Exercice 3 : Donner une expression rationnelle représentant les langages reconnus par chacun des automates suivants :

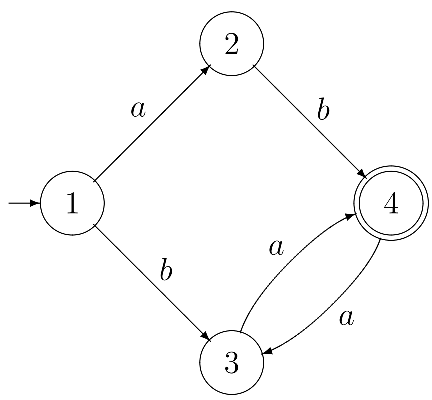
(a)




Preuve

On trouve $L = (ab)^*(aa + b + \epsilon)$

(b)




Preuve

On trouve $L = (ab + ba)(aa)^*$

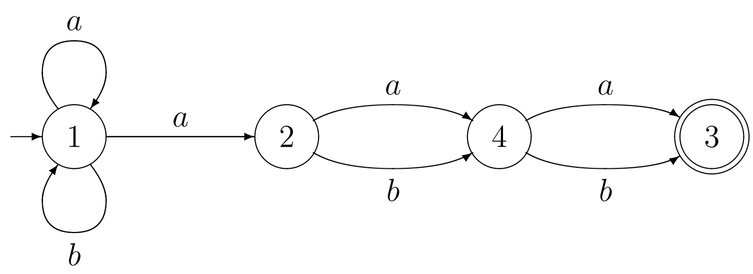
Exercice 4 : Soit automate fini $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, i, T)$ déterministe complet.
Montrer que le complément de $L(\mathcal{A})$ est reconnu par $\mathcal{A}_C = (Q, A, \delta, i, Q \setminus T)$.
En déduire que Rec$A^*$ est fermé par complémentation.

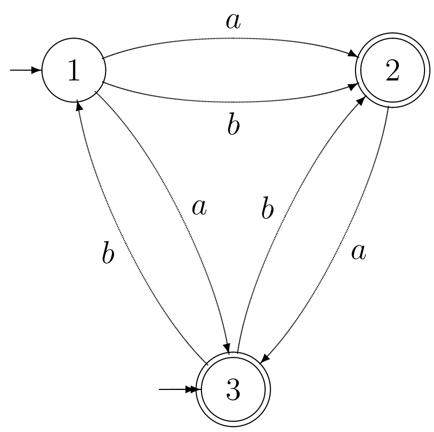
Preuve

Le fait que $\mathcal{A}$ soit déterministe complet rend $m \mapsto \delta^*(i, m)$ surjective sur $A^*$ dans $Q$ :

$$\begin{aligned} m \in L(\mathcal{A}_C) &\Leftrightarrow \exists q \in Q \setminus T \text{ tel que } \delta^*(i,m) = q \\ &\Leftrightarrow (\delta^*(i,m) \notin T) \wedge (\delta^*(i,m) \in Q) \text{ ( remarque : car } \mathcal{A} \text{ est complet !)} \\ &\Leftrightarrow m \notin L(\mathcal{A}) \\ &\Leftrightarrow m \in A^* \setminus L(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

Exercice 5 : Déterminiser les automates suivants par la méthode des sous-ensembles.

1. 


2. 


Exercice 6 : Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux automates déterministes.
Construire un automate déterministe qui reconnaît $L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B})$.

Preuve

On suppose que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont complets ( quitte à les rendre complet en ajoutant les états puits...).On note alors $\mathcal{A} = (Q_A, A, \delta_A, i_A, T_A)$ et $\mathcal{B} = (Q_B, A, \delta_B, i_B, T_B)$.
On pose $\mathcal{U} = (Q_A \times Q_B, A, \delta_U, (i_A, i_B), T_U)$ avec :

- $\delta_U((p_A, p_B), a) = (q_A, q_B) \Leftrightarrow (\delta_A(p_A, a) = q_A) \wedge (\delta_B(p_B, a) = q_B)$
- $T_U = (T_A \times Q_B) \cup (Q_A \times T_B)$

On démontre alors que $\mathcal{U}$ est bien déterministe complet ( par construction ) et qu'il reconnait bien le langage $L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B})$...

Exercice 7 : Donner, pour chaque langage sur $A = \{a, b, c\}$ donné par les expressions rationnelles suivantes, un automate déterministe qui le reconnaisse :

1. $L_1 = (a+b)^*ca*$
2. $L_2 = (a+b+c)^*(b+c)$

<u>Exercice 8 :</u> Donner, pour chaque langage sur $A = \{a, b\}$ suivants, un automate déterministe qui le reconnaisse :

(a) L'ensemble des mots de longueur paire.

(b) L'ensemble des mots se terminant par $a$.

(c) L'ensemble des mots ayant pour préfixe $aba$.

(d) L'ensemble des mots ayant pour suffixe $aba$.

(e) L'ensemble des mots ayant pour facteur $aba$.

<u>Exercice 9 :</u> On note $\Sigma$ l'alphabet $\{a, b\}$.
Soit $L$ un langage sur cet alphabet ; on note $\Phi(L)$ le langage déduit de $L$ en "ajoutant" une lettre $a$ en fin de chacun de ses mots :

$$u \in \Phi(L) \Leftrightarrow \exists v \in L \text{ tel que } u = va$$

1. Existe-t-il des langages finis tels que $\Phi(L) = L$ ?

   Preuve

   ---

   Bien sur que non... Il suffit de faire une démonstration par l'absurde en prenant un mot de $L$ de taille maximum, et forcément, $ua$ est plus grand...

2. On note $L = \{a, ab, aaa\}$. Dessinez un automate fini reconnaissant $L$, puis un automate fini reconnaissant $\Phi(L)$.

   Preuve

   ---

   Bien sur que non... Il suffit de faire une démonstration par l'absurde en prenant un mot de $L$ de taille maximum, et forcément, $ua$ est plus grand...

3. On note $M$ le langage constitué des mots contenant un nombre pair de lettres $b$.
   Dessinez un automate fini reconnaissant $\Phi(M)$ .

<u>Exercice 10 :</u>

1. Construire un automate reconnaissant le langage des mots $m$ sur $A = \{a, b\}$ tels que $|m|_a$ soit un multiple de 3.
2. En déduire une expression rationnelle dénotant ce langage.

<u>Exercice 11 :</u> On note $\Sigma$ l'alphabet $\{a, b\}$.
Montrer que les langages suivants ne sont pas rationnels :

1. $L_1 = \{u \in A^* | \ \ |u|_a = |u|_b\}$. Preuve

   ---

   Il s'agit de la négation du lemme de l'étoile. En posant $f = a.a^N.a.b^{N+2}$, on a ainsi l'existence de $u_i = a^i$, $u_j = a^j$, et $u_k = a^k$, avec $i + j + k = N$ et $j > 0$ tel que, pour tout $n$, $a.u_i.u_j^n.u_k.a.b^{N+2} \in L_1$, ce qui est absurde pour $n = 2$ par exemple...

2. $L_2$, l'ensemble des palindromes de $\Sigma^*$.

   Preuve

   ---

   Il s'agit de la négation du lemme de l'étoile. En posant $f = a^N ba^N$, on factorise comme précédemment le $v = a^N$...